含意弱半束の形式化

荒金　憲一

Formulations for implicative weak semilattices

Kenichi ARAGANE

半束での巾等律を弱い条件 $x \wedge x \wedge y = x \wedge y$ で置き換えたものが弱半束（*WSL*）である．これと演繹的に同値な，G. Gentzen の方法（[4]）でのシーケント（式）による形式的体系（*GWSL*）を [2] で考えた．また，[1] では 2 項演算 $\supset$ を導入し，含意弱半束（*IWSL*）を定義した．本論文では，*IWSL* と演繹的に同値なシーケントによる形式的体系（*GIWSL*）を考える．さらに，*IWSL* と同値な D. Hilbert のスタイル（[3]，[5]）の形式的体系（*HIWSL*）を考える．

§1　ワード

[1] と同様にワードを定義する．

［　**定義 1**　］（**ワードの定義**）

(1) 変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ はワードである．

(2) x と y がワードのとき $x \wedge y$ と $x \supset y$ はワードである．

(3) 以上の (1)，(2) によって構成された記号列のみがワードである．

ワード全体の集合を W とし，代数系 $\mathbf{A} = (W; \wedge, \supset)$ を考える．

§2　*IWSL*

[1] と同様に弱半束を定義する．

［　**定義 2**　］（**WSL の定義**）

W の任意の元 x, y, z に対して，次の $F1$，$F2$，$F3$ が成り立つとき，代数系 $\mathbf{A}$ を弱半束（*WSL*, *weak semilattice*）とよぶ．

$$
\begin{array}{ll}
F1 & (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \\
F2 & x \wedge y = y \wedge x \\
F3 & (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y
\end{array}
$$

[1] と同様に 2 項関係 $\leq$ を定義する．

［　**定義 3**　］（**不等式の定義**）

x, y を W の任意の元とする．$x \wedge y = x$ または $x = y$ が $\mathbf{A}$ で成り立つとき，$x \leq y$ と書く．

[1] で証明したように，次の定理が成り立ち，$\leq$ が順序関係であることがわかる．

［　**定理 1**　］
A が *WSL* である $\Longleftrightarrow$ W の任意の元 $x,\ y,\ z,\ u,\ v$ に対して **A** で次の $T1 \sim T6$ が成り立つ.

$T1$ 　$x \leq x$
$T2$ 　$x \leq y,\ y \leq x \Longrightarrow x = y$
$T3$ 　$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$
$T4$ 　$x \wedge y \leq x,\ \ x \wedge y \leq y$
$T5$ 　$x \wedge y \leq u,\ x \wedge y \leq v \Longrightarrow x \wedge y \leq u \wedge v$
$T6$ 　$x \neq y,\ \ z \leq x,\ \ z \leq y \Longrightarrow z \leq x \wedge y$

[1] と同様に含意弱半束を定義する.

［　**定義 4**　］（***IWSL*** **の定義**）
W の任意の元 x, y, z, u, v に対して，定理 1 の $T1 \sim T6$ と次の $T7$ が成り立つとき，代数系 **A** を含意弱半束（*IWSL, implicative weak semilattice*）とよぶ.

$$T7 \qquad z \wedge x \leq y \Longleftrightarrow z \leq (x \supset y)$$

[1] と同様に次のことが成り立つ.

［　**注意 1**　］
(1) $x \leq y \Longrightarrow x \wedge z \leq y \wedge z$
(2) $x \leq y, u \leq v \Longrightarrow x \wedge u \leq y \wedge v$
(3) $x \wedge (x \supset y) \leq y \Longleftrightarrow \ (z \leq (x \supset y) \Longrightarrow z \wedge x \leq y)$

§3　*GIWSL*

[2] と同様にシーケント(式)を定義する.

［　**定義 5**　］（**シーケント (sequent) の定義**）
(1) ワードの有限列をギリシア大文字 Γ，Δ などで表す.
(2) ワードの有限列 $a_1, \ldots, a_n$ を Γ で表し，b をワードとするとき，*IWSL* での不等式 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq b$ を $\Gamma \to b$ で表し，これをシーケントとよぶ．ただし，Γ と b が共に空になることはないものとする.

[2] と同様の方法で，含意弱半束のシーケントによる形式的体系（*GIWSL*）を定義する．演算 $\supset$ に関する 2 つの推論規則を *GWSL* に付け加えたものが *GIWSL* である.

［　**定義 6**　］（***GIWSL*** **の定義**）
含意弱半束（*IWSL*）のシーケントによる形式的体系 *GIWSL* を次のように定義する.

[1] 始シーケント
　(*B*) $x \to x$

[2] 推論規則
(1) 構造上の推論規則
(1.1) 増（weakening）の規則

$$\frac{\Gamma \to d}{a, \Gamma \to d} \qquad (w \to)$$

ただし，Γ は空でない（$\Gamma \neq \emptyset$ と書く）とする.

(1.2) 縮（contraction）の規則

$$\frac{a\,,a\,,\Gamma\to d}{a,\Gamma\ \to d}\qquad (c\to)$$

ただし，a が変数のときは，Γ は空でないとする.（a が変数でないときは，Γ は空でもよい.）

(1.3) 換（exchange）の規則

$$\frac{\Gamma_1, a\,, b\,, \Gamma_2\to d}{\Gamma_1, b\,, a\,, \Gamma_2\to d}\qquad (e\to)$$

(1.4) 切（cut）の規則

$$\frac{\Gamma\to c\qquad c\,,\Delta\to d}{\Gamma,\Delta\to d}\qquad (c)$$

(2) 演算 ∧ に関する推論規則

$$\frac{a\,,\Gamma\to d}{a\wedge b\,,\Gamma\to d}\ (\wedge_1\to)\qquad \frac{b\,,\Gamma\to d}{a\wedge b\,,\Gamma\to d}\ (\wedge_2\to)$$

$$\frac{\Gamma\to a\qquad \Delta\to b}{\Gamma,\Delta\ \to a\wedge b}\ (\to\wedge_1)\qquad \frac{\Gamma\to a\qquad \Gamma\to b}{\Gamma\ \to a\wedge b}\ (\to\wedge_2)$$

ただし，$(\to\wedge_2)$ においては，$a\neq b$ とする.

(3) 演算 ⊃ に関する推論規則

$$\frac{\Gamma\to a\qquad b,\Delta\to c}{a\supset b,\Gamma,\Delta\to c}\ (\supset\to)\qquad \frac{a\,,\Gamma\to b}{\Gamma\to a\supset b}\ (\to\supset)$$

§4　*IWSL* と *GIWSL* の演繹的同値性

シーケント $\Gamma\to b$ が *GIWSL* で証明可能であるとき，$\vdash_G \Gamma\to b$ と書く.
また，*IWSL* で不等式 $a\leq b$ が成り立つとき，$\vDash a\leq b$ と書く.

[2] と同様に次の 3 つの定理が成り立つ.

［　**定理 2**　］

$$\vDash a\leq b\quad ならば\quad \vdash_G a\to b$$

（　証明　）

（定義 4）の不等式（$T1$)～($T7$）をシーケントにしたものが *GIWSL* で証明可能であることを示す.
($T1$)～($T6$）については，[2] の（定理 3）で示されているから，($T7$）だけを示せばよい.

$T7$ $\Longrightarrow$ ：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{z\to z\quad x\to x}{z,\ x\to z\wedge x}\qquad z\wedge x\to y}{z,\ x\to y}}{z\to x\supset y}$$

$\Longleftarrow$ ：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{z\to x\supset y}{z\wedge x\to x\supset y}\qquad \cfrac{x\to x\quad y\to y}{x\supset y,\ x\to y}}{z\wedge x,\ x\to y}}{z\wedge x,\ z\wedge x\to y}}{z\wedge x\to y}$$

（証明終）

［　**定理 3**　］

$$\vdash_G a_1\,,\ldots,a_n\to b\qquad ならば\qquad \vDash a_1\wedge\cdots\wedge a_n\leq b$$

（　証明　）

ワードの有限列 Γ が $a_1\,,\ldots,a_n$ のとき，$a_1\wedge\cdots\wedge a_n$ を x などと書くことにする.

$GIWSL$ の始式 (B) は $(T1)$ から成り立つ．
次に，$GIWSL$ の各推論規則の上式（上のシーケント）に対応する不等式が $IWSL$ で成り立つと仮定するとき，下式に対応する不等式が $IWSL$ で成り立つことを示す．
$(w\rightarrow)$ から $(\rightarrow\wedge_2)$ の8つの推論規則については，[2] の（定理4）で示されているから，$(\supset\rightarrow)$ と $(\rightarrow\supset)$ だけを示せばよい．
$(\supset\rightarrow)$： $x \leq a$ かつ $b \wedge y \leq c$ のとき $(a \supset b) \wedge x \wedge y \leq c$ を示せばよい．（注意1）の(3)より $a \wedge (a \supset b) \leq b$ で，$y \leq y$ から $a \wedge (a \supset b) \wedge y \leq b \wedge y \leq c$ … (1)
仮定 $x \leq a$ より $(a \supset b) \wedge x \wedge y \leq a \wedge (a \supset b) \wedge y$ … (2)
(1)，(2) から $(a \supset b) \wedge x \wedge y \leq c$
$(\rightarrow\supset)$： $a \wedge x \leq b$ のとき $x \leq a \supset b$ を示せばよい．仮定より $x \wedge a \leq b$ で，$(T7)$ を使うと $x \leq a \supset b$ を得る．
（証明終）

定理2と定理3から次の定理が成り立つ．
［ **定理4** ］ $IWSL$ と $GIWSL$ は演繹的に同値である．

§5　*HIWSL*

含意弱半束（$IWSL$）のヒルベルト流の形式的体系（$HIWSL$）を [3]，[5] と同様の方法で定義する．シーケントによる形式的体系（$GIWSL$）では，公理である始式をできるだけ簡単にし，演算記号の役割を重視して，それを推論規則として表現している．これに対して，ヒルベルト流の形式的体系（$HIWSL$）では推論規則をできるだけ簡単にして Modus Ponens（MP）の1つだけとし，演算の役割をいくつかの公理の形で表現している．

［ **定義7** ］**（*HIWSL* の定義）**
1つの推論規則と5つの公理型（axiom scheme）からなる含意弱半束（$IWSL$）のヒルベルト流の形式的体系 $HIWSL$ を次のように定義する．

[1]　推論規則

$$\frac{a \qquad a \supset b}{b} \qquad (MP)$$

[2]　公理

$(H1)$　$a \supset (b \supset a)$

$(H2)$　$[a \supset (b \supset c)] \supset [(a \supset b) \supset (a \supset c)]$

$(H3)$　$(a \wedge b) \supset a$

$(H4)$　$(a \wedge b) \supset b$

$(H5)$　$(a \supset b) \supset [(a \supset c) \supset (a \supset (b \wedge c))]$

§6　*IWSL* と *HIWSL* の演繹的同値性

ワード a が *HIWSL* で証明可能であるとき，$\vdash a$ と書く．さらに，$a_1, \dots, a_n$ を仮定すると b が証明できるとき，$a_1, \dots, a_n \vdash b$ と書く．　また，推論の図式的表現と同様に $\dfrac{a_1,\ \dots,\ a_n}{b}$ とも書くことにする．([6])

［　**定理 5**　］

$$\vdash a \qquad \text{ならば} \qquad \vdash_G \to a$$

（　証明　）
HIWSL の推論規則 (*MP*) の上のワードが *GIWSL* で証明可能であるとき，下のワードも証明可能であることを示す．

(*MP*)：

$$\dfrac{\to a \qquad \dfrac{\to a \supset b \qquad \dfrac{a \to a \quad b \to b}{a \supset b,\ a \to b}}{a \to b}}{\to b}$$

次に，*HIWSL* の公理 (*H*1)〜(*H*5) が *GIWSL* で証明可能であることを示す．

(*H*1)：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \to a}{b,\ a \to a}}{a \to b \supset a}}{\to a \supset (b \supset a)}$$

(*H*2)：

$$\begin{array}{c} a \to a \qquad \begin{array}{c} a \to a \qquad \dfrac{b \to b \quad c \to c}{b \supset c,\ b \to c} \\ \hline\hline a \supset b,\ b \supset c,\ a \to c \end{array} \\ \hline\hline a \supset (b \supset c),\ a \supset b,\ a,\ a \to c \\ \hline\hline a,\ a \supset b,\ a \supset (b \supset c) \to c \\ \hline a \supset b,\ a \supset (b \supset c) \to a \supset c \\ \hline a \supset(b \supset c) \to (a \supset b) \supset (a \supset c) \\ \hline \to [a \supset(b \supset c)]\supset[(a \supset b) \supset (a \supset c)] \end{array}$$

(*H*3)：

$$\dfrac{\dfrac{a \to a}{a \wedge b \to a}}{\to (a \wedge b) \supset a}$$

(*H*4)：

$$\dfrac{\dfrac{b \to b}{a \wedge b \to b}}{\to (a \wedge b) \supset b}$$

（$H5$）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \to a \quad b \to b}{a \supset b,\ a \to b} \qquad \dfrac{a \to a \quad c \to c}{a \supset c,\ a \to c}}{a \supset b,\ a,\ a \supset c,\ a \to b \wedge c}}{a,\ a \supset c,\ a \supset b \to b \wedge c}}{a \supset c,\ a \supset b \to a \supset (b \wedge c)}}{a \supset b \to (a \supset c) \supset (a \supset (b \wedge c))}}{\to (a \supset b) \supset [(a \supset c) \supset (a \supset (b \wedge c))]}$$

（証明終）

[3], [7] と同様に次の推論法則と公式が成り立つ．

［　**推論法則 1**　］ $\dfrac{a}{b \supset a}$

（　証明　）

$$\dfrac{a \quad a \supset (b \supset a)}{b \supset a}$$

［　**推論法則 2**　］ $\dfrac{a \supset (b \supset c)}{(a \supset b) \supset (a \supset c)}$

（　証明　）

$$\dfrac{a \supset (b \supset c) \quad [a \supset (b \supset c)] \supset [(a \supset b) \supset (a \supset c)]}{(a \supset b) \supset (a \supset c)}$$

［　**推論法則 3**　］ $\dfrac{a \supset b \quad a \supset (b \supset c)}{a \supset c}$

（　証明　）

$$\dfrac{a \supset b \quad \dfrac{a \supset (b \supset c)}{(a \supset b) \supset (a \supset c)}}{a \supset c}$$

［　**推論法則 4**　］ $\dfrac{b \supset c}{(a \supset b) \supset (a \supset c)}$

（　証明　）

$$\dfrac{\dfrac{b \supset c}{a \supset (b \supset c)}}{(a \supset b) \supset (a \supset c)}$$

［　**推論法則 5**　］

$$\dfrac{a \supset b \quad b \supset c}{a \supset c}$$

（　証明　）

$$\dfrac{a \supset b \quad \dfrac{b \supset c}{(a \supset b) \supset (a \supset c)}}{a \supset c}$$

［ **推論法則 6** ］ $\dfrac{a \supset (b \supset c)}{b \supset (a \supset c)}$

（ 証明 ）

$$\dfrac{b \supset (a \supset b) \quad \dfrac{a \supset (b \supset c)}{(a \supset b) \supset (a \supset c)}}{b \supset (a \supset c)}$$

［ **推論法則 7** ］ $\dfrac{a \supset(b \supset c)}{(a \wedge b) \supset c}$

（ 証明 ）

$$\dfrac{(a \wedge b) \supset b \quad \dfrac{(a \wedge b) \supset a \quad a \supset (b \supset c)}{(a \wedge b) \supset (b \supset c)}}{(a \wedge b) \supset c}$$

［ **公式 1** ］ $a \supset a$

（ 証明 ）

$$\dfrac{a \supset (b \supset a) \quad \dfrac{a \supset[(a \supset(b \supset a)) \supset a]}{[a \supset(b \supset a)] \supset (a \supset a)}}{a \supset a}$$

［ **公式 2** ］ $a \supset [(a \supset b) \supset b]$

（ 証明 ）

$$\dfrac{(a \supset b) \supset (a \supset b)}{a \supset [(a \supset b) \supset b]}$$

[3], [7] と同様に次の定理が成り立つ．

［ **定理 6** ］**（演繹定理）**

$$a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \vdash b \qquad \text{ならば} \qquad a_1, \ldots, a_{n-1} \vdash a_n \supset b$$

（ 証明 ）

$S_1 = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$，$S_2 = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ とする．このとき，$S_1 \vdash b$ が成り立つとき，$S_2 \vdash a_n \supset b$ を示せばよい．S_1 を仮定するとき，b を証明するワードの系列を $b_1, \cdots, b_m$ とする．ただし，$b_m = b$ であり，任意の b_i は次の (1), (2), (3) のいずれかである．

(1) b_i は仮定 $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ の中の 1 つに一致する．

(2) b_i は公理 $(H1)$〜$(H5)$ の中の 1 つに一致する．

(3) b_i は 2 つの仮定 b_j と b_k $(j, k < i)$ に推論規則 (MP) を適用して導かれる．

このとき，任意の i $(1 \leq i \leq m)$ について $S_2 \vdash a_n \supset b_i$ が成り立つことを (1), (2), (3) の場合に分け，さらに i に関する帰納法を使って示す．つまり，S_2 を仮定するとき，$a_n \supset b_1, \ldots, a_n \supset b_m$ が $a_n \supset b$ を証明する系列になる．

(1) b_i が $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ の中の 1 つに一致するとき．b_i が a_n に一致するなら，（公式 1）により $S_2 \vdash a_n \supset a_n$ で $S_2 \vdash a_n \supset b_i$ を得る．b_i が $a_1, \ldots, a_{n-1}$ の中の 1 つに一致するなら，仮定 S_2 を公理とみれば，b_i は公理の 1 つであるから $S_2 \vdash b_i$ で，（推論法則 1）により $S_2 \vdash a_n \supset b_i$ を得る．

(2) b_i が公理 $(H1)$〜$(H5)$ の中の 1 つに一致するとき．(1) の後半と同様にして $S_2 \vdash a_n \supset b_i$ を得る．

(3) b_i が 2 つの仮定 b_j と b_k $(j, k < i)$ に推論規則 (MP) を適用して導かれるとき．b_k を $b_j \supset b_i$ として $\dfrac{b_j \quad b_j \supset b_i}{b_i}$

とできる．帰納法の仮定から $S_2 \vdash a_n \supset b_j$ かつ $S_2 \vdash a_n \supset (b_j \supset b_i)$ である．（推論法則 3）を使うと $\dfrac{a_n \supset b_j \quad a_n \supset (b_j \supset b_i)}{a_n \supset b_i}$ で，$S_2 \vdash a_n \supset b_i$ を得る．よって，$S_2 \vdash a_n \supset b$ が成り立つ．（証明終）

定理 6 から次のことが成り立つ．

［ **注意 2** ］

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \vdash b \quad \text{ならば} \quad \vdash a_1 \supset (a_2 \supset (\cdots \supset (a_n \supset b) \cdots))$$

さらに，次の推論法則が成り立つ．

［ **推論法則 8** ］ $\dfrac{(a \wedge b) \supset c}{a \supset (b \supset c)}$

（ 証明 ）

$(a \wedge b) \supset c$ を仮定するとき，$a, b \vdash c$ を示せば（注意 2）から成り立つ．

$$\dfrac{\dfrac{a \qquad \dfrac{\dfrac{b}{a \supset b} \qquad \dfrac{a \supset a \qquad (a \supset a) \supset [(a \supset b) \supset (a \supset (a \wedge b))]}{(a \supset b) \supset (a \supset (a \wedge b))}}{a \supset (a \wedge b)}}{a \wedge b} \qquad (a \wedge b) \supset c}{c}$$

［ **定理 7** ］

$$\vdash_G a_1, a_2, \ldots, a_n \to b \quad \text{ならば} \quad \vdash a_1 \supset (a_2 \supset (\cdots \supset (a_n \supset b) \cdots))$$

（ 証明 ）

$a_1 \supset (a_2 \supset (\cdots \supset (a_n \supset b) \cdots))$ を $x \supset b$ などと書くことにする．

GIWSL の始式（B）については（公式 1）から $\vdash x \supset x$ が成り立つ．

次に，*GIWSL* の各推論規則の上式(上のシーケント)に対応するワードが *HIWSL* で成り立つと仮定するとき，下式に対応するワードが *HIWSL* で成り立つことを示す．

$(w \to)$： $x \neq \emptyset$ とする．$\vdash x \supset d$ のとき $\vdash a \supset (x \supset d)$ を示せばよいが，(推論法則 1)より明らか．

$(c \to)$： a が変数のとき $x \neq \emptyset$ とする．$\vdash a \supset (a \supset (x \supset d))$ のとき $\vdash a \supset (x \supset d)$ を示す．

$$\dfrac{a \supset a \qquad \dfrac{a \supset (a \supset (x \supset d)) \quad [a \supset (a \supset (x \supset d))] \supset [(a \supset a) \supset (a \supset (x \supset d))]}{(a \supset a) \supset (a \supset (x \supset d))}}{a \supset (x \supset d)}$$

$(e \to)$： $\vdash x \supset (a \supset (b \supset (y \supset d)))$ のとき $\vdash x \supset (b \supset (a \supset (y \supset d)))$ を示す．（推論法則 6）と（定理 6）を使うと $\vdash [a \supset (b \supset c)] \supset [b \supset (a \supset c)]$ が成り立つ．

$$\dfrac{x \supset (a \supset (b \supset (y \supset d))) \qquad \dfrac{[a \supset (b \supset (y \supset d))] \supset [b \supset (a \supset (y \supset d))]}{[x \supset (a \supset (b \supset (y \supset d)))] \supset [x \supset (b \supset (a \supset (y \supset d)))]}}{x \supset (b \supset (a \supset (y \supset d)))}$$

(c)： $\vdash x \supset c$ かつ $\vdash c \supset (y \supset d)$ のとき $\vdash x \supset (y \supset d)$ を示す．

$$\dfrac{x \supset c \quad c \supset (y \supset d)}{x \supset (y \supset d)}$$

$(\wedge_1 \to)$： $\vdash a \supset (x \supset d)$ のとき $\vdash (a \wedge b) \supset (x \supset d)$ を示す．

$$\dfrac{(a \wedge b) \supset a \quad a \supset (x \supset d)}{(a \wedge b) \supset (x \supset d)}$$

$(\wedge_2 \to)$： $\vdash b \supset (x \supset d)$ のとき $\vdash (a \wedge b) \supset (x \supset d)$ を示す．

$$\frac{(a \wedge b) \supset b \quad b \supset (x \supset d)}{(a \wedge b) \supset (x \supset d)}$$

$(\to\wedge_1)$： $\vdash x \supset a$ かつ $\vdash y \supset b$ のとき $\vdash x \supset (y \supset (a \wedge b))$ を示す．

$$\cfrac{\cfrac{(x \wedge y)\supset y \quad y \supset b}{(x \wedge y)\supset b} \qquad \cfrac{\cfrac{(x \wedge y)\supset x \quad x \supset a}{(x \wedge y)\supset a} \qquad ((x \wedge y) \supset a) \supset [((x \wedge y) \supset b) \supset ((x \wedge y)\supset(a \wedge b))]}{((x \wedge y) \supset b) \supset ((x \wedge y) \supset (a \wedge b))}}{\cfrac{(x \wedge y) \supset (a \wedge b)}{x \supset (y \supset (a \wedge b))}}$$

$(\to\wedge_2)$： $a \neq b$ とする．$\vdash x \supset a$ かつ $\vdash x \supset b$ のとき $\vdash x \supset (a \wedge b)$ を示す．

$$\cfrac{x \supset b \qquad \cfrac{x \supset a \quad (x \supset a) \supset [(x \supset b) \supset (x \supset (a \wedge b))]}{(x \supset b) \supset (x \supset(a \wedge b))}}{x \supset (a \wedge b)}$$

$(\supset\to)$： $\vdash x \supset a$ かつ $\vdash b \supset(y \supset c)$ のとき $\vdash(a \supset b) \supset (x \supset (y \supset c))$ を示す．$a \supset b \vdash x \supset (y \supset c)$ を示せば，(定理 6) から成り立つ．

$$\cfrac{\cfrac{x \supset a \quad a \supset b}{x \supset b} \qquad b \supset (y \supset c)}{x \supset(y \supset c)}$$

$(\to\supset)$： $\vdash a \supset (x \supset b)$ のとき $\vdash x \supset (a \supset b)$ を示す．これは (推論法則 6)より明かである．

（ 証明終 ）

(推論法則 7) と (推論法則 8) を使えば，シーケント $a_1, a_2, \ldots, a_n \to b$ のヒルベルト流の形式的体系での解釈は $a_1 \supset(a_2 \supset(\cdots\supset(a_n \supset b)\cdots))$ でも $(a_1 \wedge a_2 \wedge\cdots\wedge a_n) \supset b$ でもどちらでもよいことがわかる．

[**注意 3**]

$$\vdash a_1 \supset (a_2 \supset (\cdots\supset (a_n \supset b)\cdots)) \quad \Longleftrightarrow \quad \vdash (a_1 \wedge a_2 \wedge\cdots\wedge a_n) \supset b$$

定理 4 と定理 5 と定理 7 から次の定理が成り立つ．

[**定理 8**] *IWSL* と *HIWSL* は演繹的に同値である．

参考文献

[1] 荒金 憲一，半束の弱い形について，奈良高専研究紀要 **35** (1999)，105-110.

[2] 荒金 憲一，弱半束の決定問題とシーケントによる形式化，奈良高専研究紀要 **36** (2000)，111-116.

[3] A. Church, *Introduction to mathematical logic* I, Princeton University Press (1956).

[4] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen* I, II, Mathematische Zeitschrift **39** (1935), 176-210, 405-431.

[5] D. Hilbert and W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer (1959).

[6] 前原 昭二，数学基礎論入門，朝倉書店 (1977).

[7] 杉原 丈夫， 数学的論理学，槙書店 (1967).