# stグラフの道独立頂点集合の性質

多喜　正城　　天目　隆平*　　柏原　敏伸**

Character of the Path Independent Vertices Set in st-graph

Masakuni TAKI, Ryouhei TENMOKU* and Toshinobu KASHIWAHARA**

**Summary** For vertices of a directed st-graph, we define a path independent vertex set in which any two vertices do not exist on the same st-path, and propose the character concerning the path independent vertex set in the directed st-graph. (1) We show that there exist a directed acyclic st-graph with maximal path independent vertex sets which is equal to maximal independent vertex sets of a graph G iff the graph G is a comparability graph. (2) We also present that an algorithm which the directed st-graph with minimum st-separator is equal to the maximal path independent vertex sets of certain limited st-graph is requested.

**Key words**: independent vertex set, maximal independent vertex set, path independent vertex set, maximal path independent vertex set, comparability graph, st-separator.

## 1. Introduction

あるグラフの生成問題とは、その与えられたグラフのある特別な性質を持つサブグラフすべてを見つけることである。生成問題のいくつかの種類は、グラフの各種のクラスについて考察されてきた[1]－[11]。

グラフの独立頂点集合とは、頂点の集合で、その中のどの頂点も互いに隣接していないものを言う。

頂点sとtを持つ有向グラフ(digraph)を、st有向グラフとする。st-pathとはst有向グラフの頂点sからtへ至る単純有向道のことを言う。st有向グラフのst-separatorとは、消去すると頂点sから頂点tまでの有向路がなくなってしまうような頂点集合のことを言う。現在、いろいろな意味で等価なグラフが考えられている。一方、多喜等[8]は、グラフGのある構造の集合と、もう一方のグラフHの別の構造の集合が、頂点集合の族として同一であることで等価性を考えた。

本報告では、st有向グラフの頂点のうち、その中のどの頂点も同一のst-path上に存在しないような頂点集合を道独立頂点集合と定義し、st有向グラフの道独立頂点集合に関する2つの定理と証明を示す。

第2章では、いくつかの用語と定義を説明し、第3章で、ある無向グラフの極大独立頂点集合と等しい極大道独立頂点集合を持つacyclicなst有向グラフが存在する為の必要十分条件は、その無向グラフがコンパラビリティグラフであることを証明する。第4章で、ある限定されたst有向グラフの極大道独立頂点集合と等しい最小st-separator[12]を持つst有向グラフを求めるアルゴリズムを提示する、第5章で、結論を述べている。

## 2. Preliminaries

ここでは、有向グラフをdigraphと呼び、無向グラフと区別、単にグラフといえば、両方に共通する場合をいう。頂点uと頂点vとを結ぶ無向辺を(u, v)と表す。頂点uから頂点vとを結ぶ有向辺を(u→v)と表す。グラフGについて、頂点集合および辺集合を、それぞれ、V(G)、E(G)と表す。 従って、グラフは、G＝(V(G), E(G))と表す。digraphにおいて、頂点と辺の並び($v_1$, $e_1$, $v_2$, $e_2$, ･･･, $e_k$, $v_{k+1}$)を有向歩道と言う。辺$e_i$の両端は 頂点$v_i$と頂点$v_{i+1}$ (i＝1, 2, ･･･, k)。有向歩道で、頂点$v_i$ (i＝1, 2, ･･･, k)が全て異なるとき、有向道という。また、有向歩道で、最初と最後の頂点が同じで、他の頂点が、全て異なるとき、有向閉路と言う。

定義1　st有向グラフ：頂点sとtを持つ有向グラフ

定義2　acyclicグラフ：有向閉路を持たないグラフ

定義3　st-path：頂点sから頂点tへの有向道

＊大阪大学（現在、奈良先端科学技術大学院）
** 大阪大学大学院

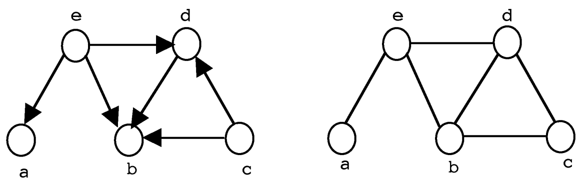


図2-1 推移的グラフとコンパラビリティグラフ

定義4 推移的グラフ：digraph G＝(V(G), E(G))において、(u→v)と(v→w)の辺が存在するとき、(u→w)の辺が必ず存在するような digraph G＝(V(G), E(G))。

定義5 コンパラビリティグラフ：無向グラフG＝(V(G), E(G))の各辺に向きを与えて、有向グラフにするとき、その有向グラフを推移的グラフにすることが可能な無向グラフG＝(V(G), E(G))。

定義6 独立頂点集合：グラフの頂点集合の部分頂点集合で、どの2頂点も辺で結ばれていないもの。

定義7 極大独立頂点集合：独立頂点集合であって、他のいかなる独立頂点集合も真部分集合として持たない頂点集合。無向グラフG＝(V(G), E(G))について、

MIS(G)≡{S|SはGの極大独立頂点集合}とする。

定義8 道独立頂点集合：st有向グラフの頂点のうち、その中のどの2頂点も同一のst-pathに存在しないような頂点集合。また、そのような頂点の関係を、道独立と言う。

定義9 極大道独立頂点集合 (MPI, maximal path independent)：道独立頂点集合であって、他のいかなる道独立頂点集合も真部分集合として持たない頂点集合。st有向グラフH＝(V(H), E(H))について、

MPI(H)≡{S|SはHの道極大独立頂点集合}とする。

定義10 短絡辺：(u→w)に対して(u→v)と(v→w)の辺が存在するとき、(u→w)は短絡辺であるという。

## 3．st有向グラフとコンパラビリティグラフの関係

グラフGが、コンパラビリティグラフならば、Gは推移的に向き付けが可能である。Gの推移的向き付けをしたグラフをG'とする。グラフG'の短絡辺を全て消去して、入ってくる辺のない全ての頂点($V_{source}$)に頂点sから有向辺を付け加え、出て行く辺のない全ての頂点($V_{sink}$)から、頂点tに有向辺を付け加えたグラフをG"とする(図2-2)。

Corollary 1：MPI(G") ⊇ MIS(G)

グラフGにおいて独立である2頂点a、bは、グラフG'において、頂点aから頂点bへ到達可能でない、かつ、頂点bから頂点aへ到達可能でない。よって、グラフG"においても頂点aから頂点bへ到達可能でない、かつ、頂点bから頂点aへ到達可能でない。

以上より、

グラフGにおいて独立である任意の2頂点は、グラフG"の頂点sから頂点tへの同一のpath上には存在しない。すなわち、MIS(G)の任意の元は、グラフG"において道独立である。

さらに、MIS(G)の任意の元をI1、グラフGの頂点でI1に属さない任意の頂点をcとする。グラフGにおいて、頂点cはI1内に頂点cと独立でない頂点が少なくとも1つ存在する。その頂点をdとすると、グラフG'において、

頂点cから頂点dに有向辺が存在する、または、頂点dから頂点cに有向辺が存在する。

よって、グラフG"において頂点cから頂点dに到達可能である、または、頂点dから頂点cに到達可能である。ここで、グラフG"は、グラフG'の短絡辺を消去して頂点sと頂点tを加えたグラフなので、グラフG'の任意の頂点から到達可能な頂点は、グラフG"の到達可能な頂点と頂点s、頂点tを除いて同じである。

よって、グラフG"において頂点cと頂点dを両方通過するst-pathが存在する。このことは、任意のI1、および、任意の頂点cに対して成り立つので、

MPI(G")⊇MIS(G)。■

Corollary 2：MPI(G") ⊆ MIS(G)

グラフG"で同一のst-path上に存在しないような任意の2頂点a、bにおいて、

グラフG"で頂点aから頂点bへ到達可能でない、かつ、頂点bから頂点aへ到達可能でない。

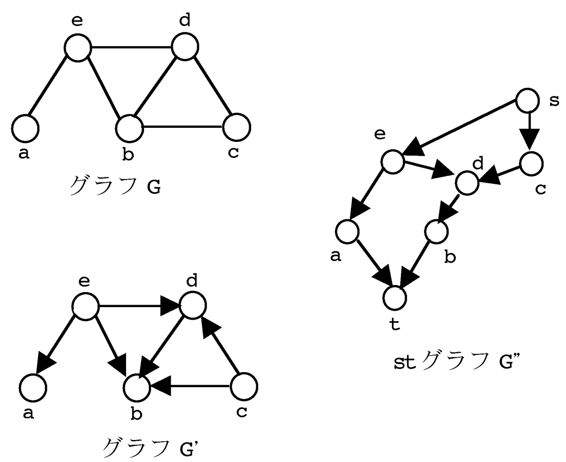


図2-2 グラフGと推移的グラフG'とG'から作られたstグラフG"

よって、グラフG'で頂点aから頂点bへ到達可能でない、かつ、頂点bから頂点aへ到達可能でない。

よって、グラフGで2頂点a、bは独立である。
すなわち、

MPI(G'')の任意の元は、グラフGにおいて独立な頂点集合である。

さらに、MPI(G'')の任意の元を、MPI1とし、MPI1に属さないグラフG''の任意の頂点eとする。グラフG''において頂点eは、MPI1内に少なくとも1つは同一のst-path上に存在する頂点を持つ。この頂点の任意の1つをfとすると、

グラフG''において頂点eから頂点fに到達可能である、または、頂点fから頂点eに到達可能である。

よって、グラフG'において、頂点eから頂点fに有向辺が存在する、または、頂点fから頂点eに有向辺が存在する。

よって、グラフGにおいて、頂点e、f間に有向辺が存在する。すなわち、

グラフGにおいて、頂点e、fは独立でない。このことは、任意の頂点e、及び、任意の頂点fに対して成り立つので、MPI(G'') ⊆ MIS(G)。■

よって、Corollary 1およびCorollary 2より、次のLemma 1が得られる。

Lemma 1：Gがコンパラビリティグラフなら、Gの極大頂点集合と等しい極大道頂点集合を持つacyclicなst有向グラフが存在する。

st有向グラフHが、acyclicな有限グラフであるので、有限長のst-pathを有限個もっている。
それらの全てのst-pathに対して、頂点sから頂点tまで通過する順番に番号を付け（s→1→2→･･･→n→t）を行う。

頂点s、tを除いたグラフHの全ての頂点はグラフGと対応しているので、グラフGの頂点も同様に、1, 2, ･･･, nの番号をつける。

MPI(H)の各元はグラフHにおいて、1, 2, ･･･, nと番号付けられた頂点のどの任意の2頂点も同時に含むことはない。

Corollary 3：MPI(H)＝MIS(G)ならば、グラフGは向き付け可能である。

MPI(H)＝MIS(G)より、グラフGにおいて1, 2, ･･･, nと番号付けられた頂点のどの任意の2頂点間にも無向辺が存在する。これらの辺に対してそれぞれの辺の両端点につけられた番号が小さい方の頂点から大きい方の頂点に向かって向きを付けると、推移性を満たす向き付けができる（関係＜は、全ての正の整数に対して推移性を満たす）。

グラフHの2本以上の異なるst-pathが通る2頂点a, bに対して以下の条件を満たす異なる2本のst-path：p1, p2が存在すると仮定する。

p1上の頂点の番号付けの操作において、
(頂点aに付けられた番号)＜(頂点bに付けられた番号)
p2上の頂点の番号付けの操作において、
(頂点aに付けられた番号)＞(頂点bに付けられた番号)

このとき、グラフHは頂点aから頂点bへのpathを持つ、かつ、グラフHは頂点bから頂点aへのpathを持つ。よって、グラフHは有向閉路を持つことになり、グラフHがacyclicであることと矛盾する。以上より、グラフGの全ての辺に推移性を満たすように向き付けが可能である。■

Corollary 3より、次のLemma 2が得られる。

Lemma 2：無向グラフGの極大頂点集合と等しい極大道頂点集合を持つacyclicなst有向グラフが存在したとき、Gはコンパラビリティグラフである。

以上より、Lemma 1とLemma 2から、次の定理が得られる。

Theorem 1：ある無向グラフGの極大頂点集合と等しい極大道頂点集合を持つacyclicなst有向グラフが存在するための必要十分条件は、Gがコンパラビリティグラフである。

## 4．st有向グラフのst-separator

定義11 st独立path：頂点sから頂点tへの有向pathのうち、合流、分岐を全くしないpath。すなわち、その中の他のどのst-pathとも頂点または辺を共有しないようなst-path。

定義12 st-separator：st有向グラフにおいて、消去すると頂点sから頂点tへの有向pathが無くなってしまうような頂点集合。

定義13 最小st-separator：st-separatorのうち、要素数が最小のもの。

Cv(H)≡{S|Sはst有向グラフHの最小st-separator}
とする。

さらに、
st有向グラフHの辺集合について次のように定義する。

$E_p$：st有向グラフHのst独立path上の全ての辺の集合。

E：st有向グラフHのst独立path上にない全ての辺の集合。

$E_1$：任意の異なる2本のst独立pathが通過する頂点をそれぞれ、

$s, a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots, t$
$s, b_1, b_2, \cdots b_m, \cdots, t$　としたとき
$a_n \rightarrow b_m \in E \iff b_{m-1} \rightarrow a_{n+1} \in E_1$
すなわち、Eの辺$(a_n \rightarrow b_m)$を横切る辺の集合。
したがって、グラフHは、H＝(V、$E_p \cup E$)、また、グラフH1については、H1＝(V、$E_p \cup E_1$)とする。

グラフHの任意の2つの道独立(Ist-path)な2頂点p、qについて、頂点pと頂点qの位置関係は、図4-1の1)から6)のいずれかである。ただし、図4-1の水平方向の矢印付きの直線はst独立pathを表し、垂直方向の矢印付き直線は異なる2本のst独立path上の2頂点間を結ぶ有向辺を表す。頂点pと頂点qの存在する2本のst独立path間に複数の有向辺が存在する場合は、図4-1の1)から6)のパターンの組み合わせになる。

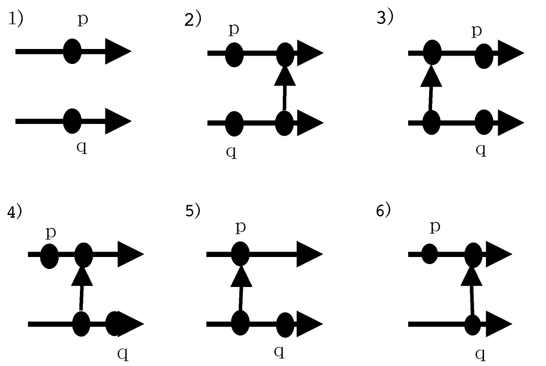

図4-1　グラフHでの頂点pと頂点qの位置関係

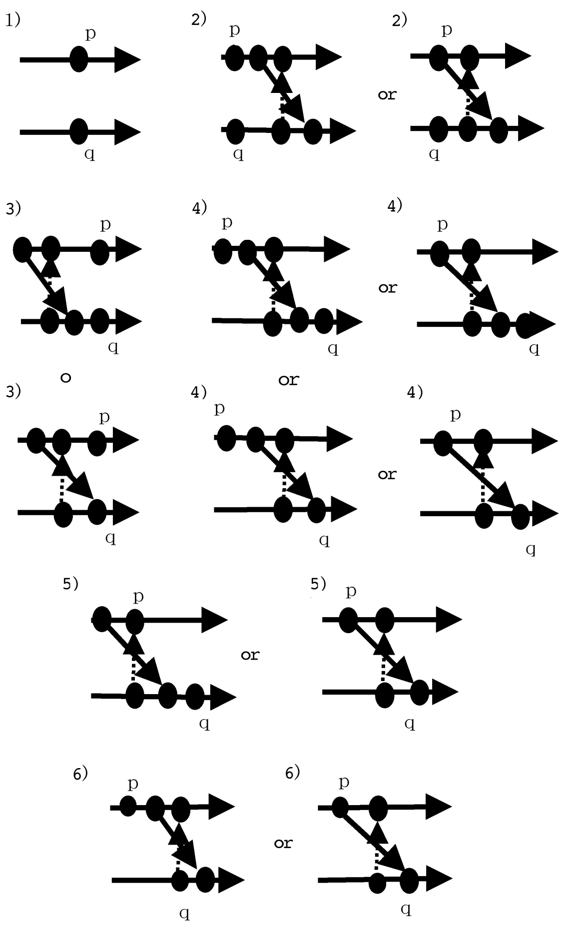

図4-2　グラフH1での頂点pと頂点qの位置関係

また、図4-1の1)から6)に対するグラフH1での頂点pと頂点qの位置関係は図4-2のようになる。

ただし、図4-2の水平方向の矢印付きの直線はst独立pathを表し、垂直方向の矢印付き点線は元のグラフHにおける異なる2本のst独立path上の2頂点間を結ぶ有向辺を表し、斜めの向きの矢印付き実直線は、Eの辺$(a_n \rightarrow b_m)$を横切る有向辺を表す。

図4-2のいずれの場合も、グラフH1において、頂点p、qの存在する2本のst独立path上の頂点p、qを消去すると頂点sから頂点tへの有向道は存在しなくなる。さらに、

Corollary 4：グラフHの2本のst独立path上の頂点p、qの消去により、頂点sから頂点tへの有向道は無くなる。

元のグラフHの頂点pと頂点qの存在する2本のst独立path間に複数の有向辺が存在する場合のグラフH1における新しい有向辺は、図4-2の1)から6)のパターンの組み合わせになり、いずれの場合も、頂点p、qの存在する2本のst独立pathを考えたとき、頂点p、qを消去すると頂点sから頂点tへの有向道は存在しなくなる。■

グラフHが持つst独立pathの数をkとすると、MPI(H)の各元の要素はkであるので、MPI(H)の任意の元を$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$とする。

Corollary 5：頂点$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$はk本のst独立path上にそれぞれ1つずつ存在する。

道独立の定義より明らか。■

Lemma 3：MPI(H)の任意の元は、グラフH1のst-separatorである。

いま、MPI(H)の任意の元はグラフH1のst-separatorではないとすると、$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$はグラフH1のst-separatorではないことにより、頂点$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$を消去しても頂点sから頂点tに有向道が存在することになる。すなわち、H1において、

$p_n, p_m \in \{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$ かつ、$p_n \neq p_m$

である頂点$p_n$と頂点$p_m$を通過しないst-pathを実現する有向辺eが存在する(図4-3)。
この2頂点$p_n, p_m$が存在する2本のst独立pathを考えたとき、頂点$p_n, p_m$を消去してもst-pathが存在することになり、Corollary 4に矛盾。よって、Lemma 3が得られる。■

Corollary 6：MPI(H)の任意の元$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$は、グラフH1の最小st-separatorである。

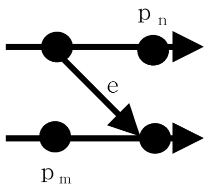


図4-3　$p_n$, $p_m$がst-separatorではない

Corollary 5より、$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$からどの頂点集合を除いても、st-pathができてしまうので、$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$のどの真部分集合もグラフH1のst-separatorではない。すなわち、$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$は極小st-separatorである。また、グラフH1はk本の独立pathを持っているので、k個より少ない任意の頂点集合はグラフH1のst-separatorではない。すなわち、$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$ は、グラフH1の最小st-separatorである。■

以上より、次のLemma 4が得られた。

Lemma 4：MPI(H) ⊆ Cv(H1)

つぎに、グラフH1のst-separatorのうち任意の2頂点p、qを考える。

st-separatorであることより、頂点p、qの位置関係は、図4-2の1)から6)のいずれかであり、頂点pと頂点qの存在する2本のst独立path間に複数の有向辺がある場合は、図4-2の1)から6)のパターンの組み合わせになる。また、図4-2の1)から6)のそれぞれにおけるグラフHでの頂点p、qの位置関係は、図4-1のようになる。

Corollary 7：グラフH1の2本のst独立path上の頂点p、qは、グラフHにおいて、道独立である。

元のグラフH1の頂点pと頂点qの存在する2本のst独立path間に複数の有向辺が存在する場合のグラフHにおける新しい有向辺は、図4-1の1)から6)のパターンの組み合わせになり、いずれの場合も、頂点p、qは道独立である。■

グラフH、及び、グラフH1のst独立pathの数をkとすると、Lemma 4より、MPI(H)の任意の元(要素数k)がCv(H1)に属するので、Cv(H1)の各元の要素数はkである。Cv(H1)の任意の元を $\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$ とする。

Corollary 8：グラフH1にはst独立pathがk本存在するので、$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$はk本のst独立path上にそれぞれ1つずつ存在する。

$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$ のうち任意の2頂点$p_n$, $p_m$に対してCorollary 7を適用すると2頂点$p_n$, $p_m$は、グラフHにおいて道独立である。■

任意の2頂点$p_n$, $p_m$に対して道独立が成り立つので、$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$ はグラフHの道独立頂点集合である。

Corollary 9：Cv(H1)の任意の元 $\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$ はグラフHの極大独立頂点集合

$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$ にグラフH上の新たな頂点$p_{k+1}$を加えた頂点集合$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k, p_{k+1}\}$を考える。Corollary 8より頂点$p_{k+1}$は$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$のうちどれか1つの頂点と同じst独立path上に存在するので、頂点集合 $\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k, p_{k+1}\}$ はグラフHの道独立頂点集合でない。すなわち、$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k\}$ はグラフHの極大独立頂点集合である。■

以上より、

Lemma 5：Cv(H1) ⊆ MPI(H)

よって、Lemma 4およびLemma 5から、次の定理が得られた。

Theorem 2：グラフH＝(V、$E_p$∪E)に対して、グラフH1＝(V、$E_p$∪$E_1$)は、MPI(H) ＝Cv(H1)を満たす。

すなわち、st有向グラフにおいて、st独立pathが決まれば、そのst有向グラフの最小st-separatorは、そのst有向グラフの極大道独立頂点集合と等しい。

以上より、アルゴリズムは、グラフHの頂点p、qのパターンに対するグラフH1の頂点p、qを求めればよい。

## 5. Conclusion

st有向グラフの道独立頂点集合に関する2つの定理を提示し、その正当性を証明した。すなわち、(1)ある無向グラフGの極大頂点集合と等しい極大道頂点集合を持つacyclicなst有向グラフが存在するための必要十分条件は、Gがコンパラビリティグラフである。

(2)ある限定されたst有向グラフの極大道独立頂点集合と等しい最小st-separatorを持つst有向グラフを求める定理を提示し、その正当性を証明した。

今後の課題としては、ある限定されたst有向グラフの極大道独立頂点集合と等しい最小st-separatorを持つst有向グラフを求めるアルゴリズムを、一般のst有向グラフに拡張した定理の提示と証明が挙げられる。

## 参考文献


[1] S. Tsukiyama, M. Ide, H. Ariyoshi, and I. Shirakawa, “A new algorithm for generating all the maximal independent sets,” SIAM J. Comput., vol.6, pp.505_517, 1977.

[2] S. Tsukiyama, H. Ariyoshi, and I. Shirakawa, and H. Ozaki, “An algorithm to enumerate all cutsets of a graph in linear time per cutset,” J. Assoc. Comput. Mach., vol.27, pp.619_632, 1980.

[3] D. Rotem and J. Urrutia, “ Finding maximum cliques in circle graphs,” Networks, vol.11, pp. 269_278, 1981.

[4] J. Y. T. Leung, “Fast algorithm for generating all maximal independent sets of interval, circular-arc and chordal graphs,” J. Algorithms, vol.5, pp.22_35, 1984.

[5] S. Masuda, K. Nakajima, T. Kashiwahara, and T. Fujisawa, “Efficient algorithms for finding maximum cliques of an overlap graphs,” Networks, vol.20, pp.157_171, 1990.

[6] Y. D. Liang, S. K. Dhall, and S. Lakshmivaraham, “On the problem of finding all maximum weight independent sets in interval and circular-arc graphs,” 1991 Symposium on Applied Computing, pp.465_470, IEEE Comput. Soc. Press, 1991.

[7] T. Kashiwahara, S. Masuda, K. Nakajima, and T. Fujisawa, “Generation of maximum independent sets of a bipartite graph and maximum cliques of a circular-arc graph,” J. Algorithm, vol.13, pp. 161_174, 1992.

[8] M. Taki, S. Masuda, T. Kashiwahara, “A Representation Diagram for Maximal Independent Sets of a Graph,” IEICE Transactions, Vol. E81-A , No. 5, 1998.

[9] M. C. Golubic, “ Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs,” Academic Press, San Diego, CA, 1980.

[10] J. Spinrad, “ On comparability and permutation graphs,” SIAM J. Comput., vol.14, pp.658_670, 1985.

[11] A. V. Aho, M. R. Garey, and J. D. Ullman, “The transitive reduction of directed graph,” SIAM J. Comput., vol.1, pp.131_137, 1972.

[12] V. Bouchitte, and I. Todince, “Listing all Potential Maximal Cliques of a Graph,” Lecture Note in Computer Science, pp503_515, Vol.1770, 2000.