二次元リボン結び目のもろて型　Ⅱ

安田　智之

Amphicheirality of ribbon 2-knots　Ⅱ

Tomoyuki　YASUDA

二次元リボン結び目の性質の記述には、一次元結び目の概念の拡張概念を用いることができる。最小交差数もその一つである([1], [2])。これは一次元結び目の古典的不変量である最小交点数の自然な拡張となっている。一方、一次元結び目の局所問題の代表的なものとして、結び目k^1とその鏡像$(k^1)^*$とが同値であるかどうかを判定する問題がある。同値であるとき、k^1はもろて型であるというが、最小交点数が奇数である一次元交代結び目は決してもろて型になれないという事実が知られている([3], [4])。ところが、一般の一次元結び目に対してこの定理が成立するかという問題は長らく未解決であった。本論文ではこれに関する二次元リボン結び目への拡張問題を考察する。結果として、最小交差数が奇数である二次元リボン結び目の中には、もろて型のものが存在するという事実を得る。

0.　緒　論

二次元リボン結び目の対称性については、以下のようなことが知られている。まず、四次元ユークリッド空間においては、ある三次元ユークリッド空間に対して対称な位置における([5])。次に(−)もろて型である([5])。従って、二次元リボン結び目に関しては、可逆的であることと、(+)もろて型であることが、同義となる。そこで、(+)もろて型に関してであるが、(+)もろて型でない、即ち可逆でない二次元リボン結び目は任意有限個存在する([5])。一方、任意の一次元結び目はArtinの構成法により、そのスパン結び目が構成される。スパン結び目は二次元リボン結び目であるが、すべて(+)もろて型である([6], [7])。

一方、一次元結び目の対称性について、テイトの予想と呼ばれる一連の予想があり、第一予想と第二予想については解決された([3, p.200], [4])。その系として最小交点数が奇数である一次元交代結び目は決してもろて型になれない、という事実がある。しかし、これが一般の一次元結び目について成立するかどうかは長らく未解決であった。

ここでは一次元結び目の最小交点数の概念の、二次元リボン結び目への拡張概念である最小交差数に関して、同じ問題を考察する。即ち、最小交差数が奇数である二次元リボン結び目が決してもろて型になれない、という事実が成立するかどうかを考察する。これに関し本論文では、次のことを主張し、その証明を行なう。

定理　最小交差数が奇数であるような(+)もろて型の二次元リボン結び目が存在する。

1.　準　備

1. 1　定　義

$\{ D^3_\mu \mid \mu = 1, 2, \cdots, m \}$を互いに交わらない四次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ 内の三次元球体の族とする。また、$\partial D^3_\mu = D^2_\mu$とおく。一方、$f^r_{i_r j_r} : D^2 \times I \to \boldsymbol{R}^4$ ($r = 1, 2, \cdots, m-1$; $i_r, j_r = 1, 2, \cdots, m$) を、像が互いに交わらない埋め込みの族とし、かつ、次の性質(1)、(2) を満たすものとする。但しD^2は二次元球体、$I = [0, 1]$である。

(1) $f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I) \cap O^2_\mu = \begin{cases} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \{0\}) & (i_r = \mu) \\ f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \{1\}) & (j_r = \mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I) \cup (\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu)$　は連結。

ここで K^2を二次元球面

$$(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu) \cup (\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(\partial D^2 \times I) - \mathring{T}$$

とする。但し $T=\bigcup_{r=1}^{m-1} f_{i_r j_r}^{r}(D^2\times\partial I)$ であり $\mathring{T}$ は T の内部を表す。この時、K^2のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

1. 2　定　義

$\mathcal{O}=\bigcup_{\mu=1}^{m} D_{\mu}^{3}$, $\mathcal{B}=\bigcup_{r=1}^{m-1} f_{i_r j_r}^{r}(D^2\times I)$ とおくとき

$(\mathcal{O},\mathcal{B})$ のことを二次元リボン結び目K^2に対するmベースリボン表示（或いは単にリボン表示）と呼ぶ。また$\mathcal{O}$をベース、$\mathcal{B}$をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目K^2に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことをK^2のベース指数と呼び $b(K^2)$ で表す。このときK^2は $b(K^2)$ ベース二次元リボン結び目であるという。

1. 3　定　義

$l_r=f_{i_r j_r}^{r}(\{0\}\times I)$ $(r=1,2,\cdots,m-1)$ とおく。但し、$\{0\}$ はD^2の中心点である。ここで各 l_rが $\mathcal{O}$ に有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各 l_rの方向に従って $a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rs_r}$ とし $(\mathcal{O},\mathcal{B})$ のリボン交差と呼ぶ。但し各 l_rの方向が $O_{i_r}^2$ から $O_{j_r}^2$ へ向かう方向とする。この時 $n=\sum_{r=1}^{m-1} s_r$ をリボン表示 $(\mathcal{O},\mathcal{B})$ のリボン交差数と呼び、$(\mathcal{O},\mathcal{B})$ は n 交差リボン表示であるという。そうしてK^2に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことをK^2の最小交差数（或いは単に交差数）と呼び $cr(K^2)$で表す。

1. 4　定　義

$a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rs_r}$ に対応して、s_r個の文字からなる語 w_r をつくる。つくり方は l_rがD_{μ}^3に点 a_{rv} $(v=1,2,\cdots,s_r)$ で正の側から交わるとき、w_rの v 番目の文字を x_{μ}、負の側から交わるときは同様 x_{μ}^{-1}とするものとする。つくられた語 $w_1, w_2, \cdots, w_{m-1}$ を利用してK^2の結び目群 $\pi_1(\boldsymbol{R}^4-K^2)$ の群表示を次の様に構成できる。

(1. 5)　$[\,x_{\mu};\ \mu=1,2,\cdots,m \mid x_{i_r} w_r x_{j_r}^{-1} w_r^{-1};\ r=1,2,\cdots,m-1\,]$

但し各 x_{μ}は O_{μ}^2 のメリディアン生成元とする([8])。以上の様な構成法でリボン表示 $(\mathcal{O},\mathcal{B})$ から得られた群表示 (1. 5) のことを $(\mathcal{O},\mathcal{B})$ に関連したリボン群表示と呼ぶ。また各 w_rのことをこのリボン表示の語と呼ぶ。一方、リボン群表示 (1. 5) からは、逆の手順でリボン表示 $(\mathcal{O},\mathcal{B})$ を定められるので $(\mathcal{O},\mathcal{B})$ のことをリボン群表示 (1. 5) に関連したリボン表示と呼ぶ。

1. 6　定　義

$\boldsymbol{R}_{+}^{3}$を $\boldsymbol{R}^4$内において $x_4=0, x_3\geqq 0$ によって定義される $\boldsymbol{R}^3$の上半空間とし、$\boldsymbol{R}_{-}^{3}$を $\boldsymbol{R}^4$内において$x_4=0, x_3\leqq 0$によって定義される $\boldsymbol{R}^4$の下半空間とする。ここで$\boldsymbol{R}_{+}^{3}$を方程式、$x_1'=x_1$, $x_2'=x_2$, $x_3'=x_3\cos\theta-x_4\sin\theta$, $x_4'=x_3\sin\theta+x_4\cos\theta$ に従って回転させる。この時 $\boldsymbol{R}^2$を$x_3=x_4=0$ と定めれば $\boldsymbol{R}_{+}^{3}$ は $\boldsymbol{R}^2$について回転することになる。今、$\boldsymbol{R}^3$内の一次元結び目 k^1 を $k^1\cap\boldsymbol{R}_{-}^{3}$ がプロパーに埋め込まれた自明な弧であるように置いておく。この時、$k^1\cap\boldsymbol{R}_{+}^{3}$ を上述の回転の方程式に従って回転させた時に構成される二次元結び目を k^1 のスパン結び目と呼び、spun(k^1) で表す ([5], [9], [10])。

1. 7　定　義

二次元リボン結び目 K^2 に対しその鏡像を $(K^2)^*$とし、結び目に入れられた方向を逆転したものを$-K^2$とするとき $K^2\sim(K^2)^*$ならば K^2 は(+)もろて型であるといい、$K^2\sim-(K^2)^*$ならば(−)もろて型であるという。また$K^2\sim-K^2$ ならば可逆的であるという。

1. 8　定　義

リボン表示 $(\mathcal{O},\mathcal{B})$ に関連したリボン群表示を G とする。ベースの各成分に対応する G の生成元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$の名前の適当な入換えや、バンド各成分の方向逆転を適当に行なってそれに対応するリボン群表示 G' をつくる。その上で G' の語を構成する文字 x_iを一斉に x_i^{-1} にするという操作でリボン群表示 G'' をつくる。

以上の構成で新たにつくられるリボン群表示G''をGと同一にできるとき、Gは(+)もろて型リボン群表示であるという。また、(+)もろて型リボン群表示に関連したリボン表示のことを(+)もろて型リボン表示という。

2.　定理の証明

(+)もろて型の定義 (1. 7)と (+)もろて型リボン群表示の定義（1. 8）により次のことはすぐ分かる。

2. 1　補　題

(+)もろて型リボン群表示に関連したリボン表示をもつ二次元リボン結び目は(+)もろて型である。

一方、3_5 二次元リボン結び目([1])は次のリボン群表示G_{3_5}に関連したリボン表示 $(\mathcal{O},\mathcal{B})_{3_5}$ をもつ。

$G_{3_5}=[\,x_1, x_2, x_3 \mid x_1 x_3 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_3^{-1},\quad x_1 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1}\,]$

これを利用すると、次の事実が分かる。

2. 2　補　題

3_5 二次元リボン結び目は、(+)もろて型リボン群表示に関連したリボン表示をもつ。

(証明) $(\mathcal{O},\mathcal{B})_{3_5}$ に二回の安定同値変形([11])を施すこと

により、下記のリボン群表示 G_1に関連したリボン表示 ($\mathcal{O}_1, \mathcal{B}_1$) を得る。この安定同値変形をそれらに対応するリボン群表示の同型変形で示すと、

$$\begin{aligned} G_{3_5} &\cong [\, x_1, x_2, x_3 \mid x_1 x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2, \\ &\qquad\qquad x_1 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} \,] \\ &\cong [\, x_1, x_2 \mid x_1 x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 \,] \\ &= G_1 \end{aligned}$$

ところが、G_1は(+)もろて型リボン群表示である。以下にそれを示す。

($\mathcal{O}_1, \mathcal{B}_1$) の二つのベースに対応する生成元の名前を入換えて次のリボン表示を得る。

$$G_2 = [\, x_2, x_1 \mid x_2 x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1]$$

これに関連したリボン表示を ($\mathcal{O}_2, \mathcal{B}_2$) とする。($\mathcal{O}_2, \mathcal{B}_2$) のバンドの方向を逆にすると、次のリボン群表示に関連したリボン表示を得る。

$$G_3 = [\, x_1, x_2 \mid x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} \,]$$

G_3の語 $x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1$ において x_1と x_1^{-1}、x_2 と x_2^{-1} を各々入換えたリボン群表示は次のようになる。

$$G_4 = [\, x_1, x_2 \mid x_1 x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 \,]$$

これは G_1と同一のリボン群表示である。　(証了)

2. 3　定理の証明

3_5 二次元リボン結び目は [1] より、最小交差数が3であり、かつ、補題 (2. 1, 2. 2)より、(+)もろて型である。よって定理の主張は正しい。　(証了)

2. 4　系

$3_5 \sim \mathrm{spun}(4_1)$.

(証明) 4_1 結び目 ([12]) の正則表示としてSchubertの標準形 ([13, p .36]) をとる。それから定義 (1. 6) の方法で自然に構成されるspun(4_1)のリボン表示は、[14]によればリボン群表示G_1に関連したリボン表示と一致している。 よって、補題 (2. 2) の証明より3_5 二次元リボン結び目とspun(4_1)とは同じリボン表示をもつ。　(証了)

従って、次のことが直ちに分かる。

2. 5　系

$\mathrm{cr}\,(\,\mathrm{spun}(4_1)) = 3.$

3. (+)もろて型リボン表示と最小交差数

補題 (2. 2) では、最小交差数が 3 の二次元リボン結び目に対し、最小交差数を実現する 3 ベースリボン表示から (ベース数を 2 にして) リボン交差数を 4 に「上げる」ことで、(+)もろて型リボン表示を得た。

一方、[15]においては、ベース数が 2 でリボン交差数が14のリボン表示に対し、(ベース数を 5 にして)リボン交差数を 4 に「下げる」ことで、(+)もろて型リボン表示を得ている。そうして、それは、最小交差数を実現するリボン表示でもあった。

参考文献

[1] Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon 2-knots, J. Knot Theory Ramifications 10(2001), 999-1003.

[2] 安田智之,二次元リボン結び目の最小交差数とベース数、「結び目の不変量と幾何構造」研究集会報告集 (2000), 98-106.

[3] 村杉邦男、結び目理論とその応用 (1993)、日本評論社.

[4] Murasugi, K., On invariants of graphs with applications to knot theory, Trans. Amer. Math. Soc. 314(1989), 1-49.

[5] Suzuki, S., Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4 (1976), 241-371.

[6] Satoh, S., Virtual knot presentation of ribbon torus-knots, J. Knot Theory Ramifications 10 (2000), 531-542.

[7] 安田智之、スパン結び目のリボン表現ともろて型、奈良工業高等専門学校研究紀要第36号 (2001), 117 -121.

[8] Yajima, T., On characterization of knot groups of some spheres in R^4, Osaka J. Math. 6 (1969), 435-446.

[9] Andrews, J. J. ; Curtis, M.L., Knotted 2-spheres in the 4-sphere, Ann. of Math. 70 (1959), 565-571.

[10] Kanenobu, T.; Marumoto, Y., Unknotting and fusion numbers of ribbon 2-knots, Osaka J. Math. 34 (1997), 525-540.

[11] Marumoto, Y., Stably equivalence of ribbon presentations, J. Knot Theory Ramifications 1 (1992), 241-251.

[12] Rolfsen, D., Knots and links, Math. Lecture Series 7, Publish and Perish Inc., Berkley, 1976.

[13] 河内明夫編、結び目理論 (1990)、シュプリンガーフェアラーク東京.

[14] Yasuda, T., Ribbon knots with two ribbon types, J. Knot Theory Ramifications 1 (1992), 477-482.

[15] 安田智之、二次元リボン結び目のもろて型、弓削商船高等専門学校紀要第24号 (2002)、145－147.