コンパラビリティグラフから得られるst有向グラフのセパレータ

多喜　正城　　柏原　敏伸*

Separator of st-graph from Comparability Graph

Masakuni TAKI and Toshinobu KASHIWAHARA*

Summary　For vertices of a directed st-graph, we define a path independent vertex set in which any two vertices do not exist on the same st-path, and propose the character concerning the path independent vertex set in the directed st-graph. (1) We show that there exist a directed acyclic st-graph with maximal path independent vertex sets which is equal to maximal independent vertex sets of a graph G iff the graph G is a comparability graph. (2) We also present that an algorithm which the directed st-graph with minimal st-separator is equal to the maximal path independent vertex sets of st-graph is requested.

Key words: independent vertex set, maximal independent vertex set, path independent vertex set, maximal path independent vertex set, comparability graph, st-separator.

1. はじめに

あるグラフの生成問題とは、その与えられたグラフのある特別な性質を持つサブグラフすべてを見つけることである。生成問題のいくつかの種類は、グラフの各種のクラスについて考察されてきた[1]−[11]。

グラフの独立頂点集合とは、頂点の集合で、その中のどの頂点も互いに隣接していないものを言う。

頂点ｓとｔを持つ有向グラフ(digraph)を、st有向グラフとする。st有向グラフのst-separatorとは、消去すると頂点ｓから頂点ｔまでの有向道がなくなってしまうような頂点集合のことを言う。現在、いろいろな意味で等価なグラフが考えられている。一方、多喜等[8]は、グラフＧのある構造の集合と、もう一方のグラフＨの別の構造の集合が、頂点集合の族として同一であることで等価性を考えた。

本報告では、st有向グラフの頂点のうち、その中のどの頂点も同一のst-path上に存在しないような頂点集合を道独立頂点集合と定義し、st有向グラフの道独立頂点集合に関する２つの定理と証明を示す。

第２章では、いくつかの用語と定義を説明し、第３章で、ある無向グラフの極大独立頂点集合と等しい極大道独立頂点集合を持つacyclicなst有向グラフが存在する為の必要十分条件は、その無向グラフがコンパラビリティグラフであることを証明する。第４章で、st有向グラフの極小st-separatorを求めるアルゴリズムを提示し、第５章で、結論を述べている。

＊大阪大学大学院基礎工学研究科

2. 用語と定義

ここでは、有向グラフをdigraphと呼び、無向グラフと区別、単にグラフといえば、両方に共通する場合をいう。頂点ｕと頂点ｖとを結ぶ無向辺を（u, v）と表す。頂点ｕから頂点ｖとを結ぶ有向辺を（u→v）と表す。グラフＧについて、頂点集合および辺集合を、それぞれ、V(G)、E(G)と表す。従って、グラフは、G＝(V(G), E(G))と表す。digraphにおいて、頂点と辺の並び(v_1, e_1, v_2, e_2, ····, e_k, v_{k+1})を有向歩道と言う。辺e_iの両端は頂点viと頂点v_{i+1}（i= 1, 2, ···, k）。有向歩道で、頂点v_i（i= 1, 2, ···, k）が全て異なるとき、有向道という。

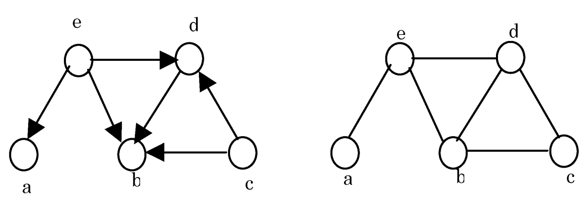

図2-1　推移的グラフとコンパラビリティグラフ

また、有向歩道で、最初と最後の頂点が同じで、他の頂点が、全て異なるとき、有向閉路と言う。

定義1　st有向グラフ：頂点sとtを持つ有向グラフ

定義2　acyclicグラフ：有向閉路を持たないグラフ

定義3　st-path：頂点sから頂点tへの有向道

定義4　推移的グラフ：digraph G＝(V(G), E(G))において、(u→v)と(v→w)の辺が存在するとき、(u→w)の辺が必ず存在するようなdigraph G＝(V(G), E(G))。

定義5　コンパラビリティグラフ：無向グラフ G＝(V(G), E(G))の各辺に向きを与えて、有向グラフにするとき、その有向グラフを推移的グラフにすることが可能な無向グラフG＝(V(G), E(G))。

定義6　独立頂点集合：グラフの頂点集合の部分頂点集合で、どの2頂点も辺で結ばれていないもの。

定義7　極大独立頂点集合：独立頂点集合であって、他のいかなる独立頂点集合も真部分集合として持たない頂点集合。無向グラフG＝(V(G), E(G))について、MIS(G)≡{S|SはGの極大独立頂点集合}とする。

定義8　道独立頂点集合：st有向グラフの頂点のうち、その中のどの2頂点もst-path上に存在しないような頂点集合。

定義9　極大道独立頂点集合(MPI, maximal path independent)：道独立頂点集合であって、他のいかなる道独立頂点集合も真部分集合として持たない頂点集合。st有向グラフH=(V(H), E(H))について、MPI(H) ≡{S|SはHの道極大独立頂点集合}とする

定義10　短絡辺：(u→w)に対して(u→v)と(v→w)の辺が存在するとき、(u→w)は短絡辺であるという。

定義11　st独立path：頂点sから頂点tへの有向pathのうち、合流、分岐を全くしないpath。すなわち、その中の他のどのst-pathとも頂点または辺を共有しないようなst-path。

定義12　st-separator：st有向グラフにおいて、消去すると頂点sから頂点tへの有向pathが無くなってしまうような頂点集合。

定義13　極小st-separator（Minimal st-separator）：st-separatorであって、そのいかなる真部分集合もst-separatorとならないst-separator。

定義14　最小st-separator：st-separatorのうち、要素数が最小のもの。

3. st有向グラフとコンパラビリティグラフの関係

グラフGが、コンパラビリティグラフならば、Gは推移的に向き付けが可能である。Gの推移的向き付けをしたグラフをG'とする。グラフG'の短絡辺を全て消去して、入ってくる辺のない全ての頂点に頂点sから有向辺を付け加え、出て行く辺のない全ての頂点から、頂点tに有向辺を付け加えたグラフをG"とする(図2-2)。

系1：MPI(G")⊇MIS(G)

グラフGにおいて独立である2頂点a、頂点bは、グラフG'において、頂点aから頂点bへ到達可能でない、かつ、頂点bから頂点aへ到達可能でない。よって、グラフG"においても頂点aから頂点bへ到達可能でない、かつ、頂点bから頂点aへ到達可能でない。以上より、

グラフGにおいて独立である任意の2頂点は、グラフG"の頂点sから頂点tへの同一のpath上には存在しない。すなわち、MIS(G)の任意の元は、グラフG"において道独立である。

さらに、MIS(G)の任意の元をI1、グラフGの頂点でI1に属さない任意の頂点をcとする。グラフGにおいて、頂点cはI1内に頂点cと独立でない頂点が少なくとも1つ存在する。その頂点をdとすると、グラフG'において、頂点cから頂点dに有向辺が存在する、または、頂点dから頂点cに有向辺が存在する。

よって、グラフG"において頂点cから頂点dに到達可能である、または、頂点dから頂点cに到達可能である。ここで、グラフG"は、グラフG'の短絡辺を消去して頂点sと頂点tを加えたグラフなので、グラフG'の任意の頂点から到達可能な頂点は、グラフG"の到達可能な頂点と頂点s、頂点tを除いて同じである。

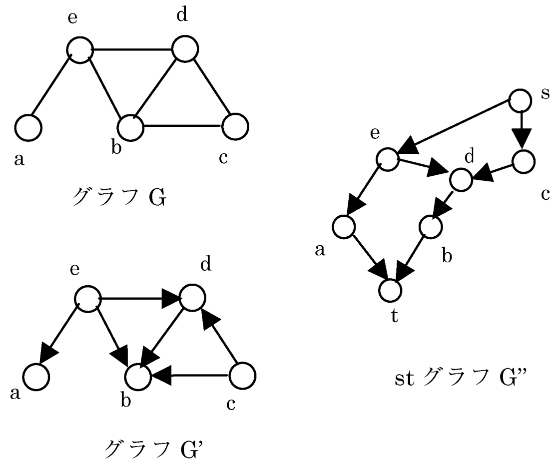

図2-2　グラフGと推移的グラフG'とG'から作られたstグラフG"

よって、グラフG''において頂点cと頂点dを両方通過するst-pathが存在する。このことは、任意のI1、および、任意の頂点cに対して成り立つので、MPI(G'')⊇MIS(G)。■

系2：MPI(G'')⊆MIS(G)

グラフG''で同一のst-path上に存在しないような任意の2頂点a、bにおいて、

グラフG''で頂点aから頂点bへ到達可能でない、かつ、頂点bから頂点aへ到達可能でない。

よって、グラフG'で頂点aから頂点bへ到達可能でない、かつ、頂点bから頂点aへ到達可能でない。

よって、グラフGで2頂点a、bは独立である。すなわち、

MPI(G'')の任意の元は、グラフGにおいて独立な頂点集合である。

さらに、MPI(G'')の任意の元を、MPI1、MPI2に属さないグラフG''の任意の頂点eとする。グラフG''において頂点eは、MPI1内に少なくとも1つは同一のst-path上に存在する頂点を持つ。この頂点の任意の1つをfとすると、

グラフG''において頂点eから頂点fに到達可能である、または、頂点fから頂点eに到達可能である。

よって、グラフG'において、頂点eから頂点fに有向辺が存在する、または、頂点fから頂点eに有向辺が存在する。

よって、グラフGにおいて、頂点e、f間に有向辺が存在する。すなわち、

グラフGにおいて、頂点e、fは独立でない。このことは、任意の頂点e、及び、任意の頂点fに対して成り立つので、MPI(G'')⊆MIS(G)。■

よって、系1および系2より、次の補題1が得られる。

補題1：Gがコンパラビリティグラフなら、Gの極大頂点集合と等しい極大道頂点集合を持つacyclicなst有向グラフが存在する。

st有向グラフHが、acyclicな有限グラフであるので、有限長のst-pathを有限個もっている。

それらの全てのst-pathに対して、頂点sから頂点tまで通過する順番に番号を付け（s→1→2→・・・→n→t）を行う。

頂点s、tを除いたグラフHの全ての頂点はグラフGと対応しているので、グラフGの頂点も同様に、1, 2, ・・・, nの番号をつける。

MPI(H)の各元はグラフHにおいて、1, 2, ・・・, nと番号付けられた頂点のどの任意の2頂点も同時に含むことはない。

系3：MPI(H)＝MIS(G)ならば、グラフGは向き付け可能である。

MPI(H)＝MIS(G)より、グラフGにおいて1, 2, ・・・, nと番号付けられた頂点のどの任意の2頂点間にも無向辺が存在する。これらの辺に対してそれぞれの辺の両端点につけられた番号が小さい方の頂点から大きい方の頂点に向かって向きを付けると、推移性を満たす向き付けができる(関係　＜　は、全ての正の整数に対して推移性を満たす)。

グラフHの2本以上の異なるst-pathが通る2頂点a, bに対して以下の条件を満たす異なる2本のst-path：p1, p2が存在すると仮定する。

p1上の頂点の番号付けの操作において、

(頂点aに付けられた番号）＜(頂点bに付けられた番号)

p2上の頂点の番号付けの操作において、

(頂点aに付けられた番号)＞(頂点bに付けられた番号)

このとき、グラフHは頂点aから頂点bへのpathを持つ、かつ、グラフHは頂点bから頂点aへのpathを持つ。よって、グラフHは有向閉路を持つことになり、グラフHがacyclicであることと矛盾する。以上より、グラフGの全ての辺に推移性を満たすように向き付けが可能である。■

系3より、次の補題2が得られる。

補題2：無向グラフGの極大頂点集合と等しい極大道頂点集合を持つacyclicなst有向グラフが存在したとき、Gはコンパラビリティグラフである。

以上より、補題1と補題2から、次の定理が得られる。

定理1：ある無向グラフGの極大頂点集合と等しい極大道頂点集合を持つacyclicなst有向グラフが存在するための必要十分条件は、Gがコンパラビリティグラフである。

4. st有向グラフのst-separator

ここでは、st有向グラフの頂点v_i（i＝1, 2, ・・・, k）について、頂点v_iを通過するst-pathの数を、st-path次数$\rho(v_i)$とする。

st有向グラフの頂点v_iを取り除くことは，st有向グラフから$\rho(v_i)$本のst-pathを切断することと同じである。従って、sとtの分離が可能となる。これは、その、頂点を除く事と、sからtへのst-pathを除くことと同じであるから、残りのst-pathについて、同様の操作を繰り返せば、st-pathの数は有限であるから、sからtへのst-pathがすべて切断されることになる。この除かれた頂点の集合が、st-separatorとなる。

ただし、sの隣接頂点集合及びtの隣接頂点集合は

st-separatorである事は自明である。

st-separator生成過程：

　いま、st有向グラフに、p本のst-pathがあり、このときのst-path次数の最大値をMax $\rho(v_{i1})=\alpha_1$とする。（ただし、α_1を持つ頂点は1個とは限らない。いくつかのα_1を持つ頂点のうちのどれか1個を頂点v_{i1}とし、以下同様に）この頂点v_{i1}を除けば、α_1本のst-pathが除かれる。残り、（$p-\alpha_1$）本のst-pathについても、st-path次数の最大値をMax $\rho(v_{i2})=\alpha_2$とすると、この頂点v_{i2}を除けば、α_2本のst-pathが除かれる。以下、残りのst-pathについて、同様の操作、st-path次数の最大値をMax $\rho(v_{ij})=\alpha_j$（$j=1, 2, \cdots n$）を繰り返せば、st-pathの数は有限であるから、sからtへのst-pathがすべて除かれることになる。これらの除かれた頂点の集合が、st-separatorとなる。■

ところで、α_j（$j=1, 2, \cdots n$）については、上記生成過程の各操作での最大値であるから、そのときの頂点v_{ij}の除去により、最大数のst-pathが切断される。すなわち、このときの頂点v_{ij}がst-pathを切断する頂点でもある。よって、各操作における、最大st-path次数頂点1個を取り除くことは、その時点での最大数のst-pathを取り除くことであるから、この操作を続けることは、最少の頂点数の除去により、α_j本ずつのst-pathを除かれたことになる。各操作での最大st-path次数を持つ頂点の選び方により、取り除かれるst-pathが、違うが、得られたst-separatorは、ユニークである。すなわち、これらの頂点集合が、極小st-separatorである。次の系が得られる。

　系4：st-path次数の最大値を持つ頂点は、極小st-separatorの要素である。

　ところで、st有向グラフには、同じ値のst-path次数の最大値を持つ頂点が複数個ある場合がある。

　今、これらをv_i、v_jとする。そして、$v_i \in$ st-pathP_l、$v_i \in$ st-pathP_m、$v_i \in$ st-pathP_n、また、$v_j \in$ st-pathP_k、$v_j \in$ st-pathP_l、$v_j \in$ st-pathP_mとする。すなわち、st-pathP_l、st-pathP_mには（v_i、v_j）の2個、そして、st-pathP_k、にはv_jを1個とすると、v_jは、st-pathP_k、st-pathP_lとst-pathP_mとの頂点。また、v_iはst-pathP_lとのst-pathP_mとの頂点であるが、この頂点v_iを取り除いても、st-pathP_kは頂点v_iにより、sとtに分離されないが、頂点v_jを取り除くと、st-pathP_lとst-pathP_k、およびst-pathP_mは頂点v_jにより、sとtに分離される（図2-3、2-4、2-5）。この場合、頂点v_jを、st-pathの切断点とよぶ。よって、

　系5：同じst-path次数の最大値を持つ頂点が存在する場合、そのような頂点を1つだけ持つst-path上のその頂点が、極小st-separatorの要素である。

　上記の過程における、各要素v_iが、st-path次数の最大値を持つ頂点であることから、極小st-separatorの要素v_iについて考えれば、v_iを除くことにより、$\rho(v_i)$本のst-pathが切断されることである。すなわち、最小の要素数により、全てのst-pathがsとtに分離される。

　系6：極小st-separatorの要素は、st-separator生成過程の各操作でのst-path次数の最大値を持つ頂点である。

　今、上記の過程により得られたst-separatorが極小st-separatorでないとすると、このst-separatorの中に、真部分集合として、st-separatorを持つ。すなわち、この真部分集合以外に、st-separatorとしての頂点があることになる。ところで、st有向グラフのst-pathの数は有限であるから、生成過程での各操作で得られた頂点は、st-path次数の最大値を持つ頂点であるので、sか

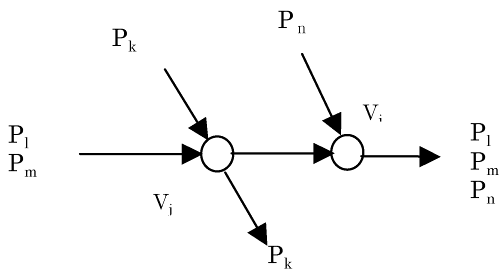

図2-3　頂点v_i、v_jと、st-pathとの位置関係

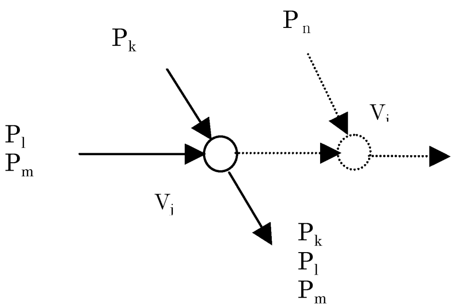

図2-4　頂点v_i除去後のst-pathとの位置関係

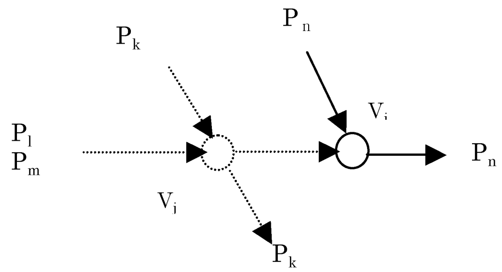

図2-5　頂点v_j除去後のst-pathとの位置関係

らtへのst-pathを余すことなく、すべて切断したことになる。すなわち、この真部分集合以外に、st-separatorとしての頂点があることに矛盾することになる■

以上、系4から系6より、次の定理が得られる。

定理2：（最大st-path次数－極小st-separator定理）st-path次数の最大値を持つ頂点は、極小st-separatorの要素である。

以上をもとに、実際のアルゴリズムを記述する。ここでは、st-path行列S＝[sij]を定義する。

st-path行列S＝[sij]：行にst-pathを、列に頂点を対応させ、st-path上に該当する頂点があれば1を、なければ0を要素とする行列。

st-path行列の列の和が、その列の頂点を通過するst-pathの数を表す。頂点vのst-path次数ρ(v)である。

Algorithm

入力　st-path行列＝S

出力　極小st-separator＝st-spt(＊)

Sの列和最大頂点をv_m、Sの列和最大頂点を含むst-pathを除いた行列＝Sm、

Start

1：S

$v_m \leftarrow \underset{j}{Max}\left(\sum_{i=1}^{n} v_{ij}\right)$

Store　st-spt()　←　v_m

S　←　Sm

If（S＝0）then　end

Go　1

End

5. 結　論

st有向グラフの道独立頂点集合に関する2つの定理を提示し、その正当性を証明した。すなわち、（1）ある無向グラフGの極大頂点集合と等しい極大道頂点集合を持つacyclicなst有向グラフが存在するための必要十分条件は、Gがコンパラビリティグラフである。

（2）。最大st-path次数―極小st-separator定理を導き、それをもとに、実際のアルゴリズムを提案した。

なお、これの応用としては、教育学習における、カリキュラム上の必修科目の決定等が考えられる。

また、極小st-separatorを用いて、次回は、さらに、最小st-separatorを求めることを提案する。

参考文献

[1] S. Tsukiyama, M. Ide, H. Ariyoshi, and I. Shirakawa, "A new algorithm for generating all the maximal independent sets," SIAM J. Comput., vol.6, pp.505_517, 1977.

[2] S. Tsukiyama, H. Ariyoshi, and I. Shirakawa, and H. Ozaki, "An algorithm to enumerate all cutsets of a graph in linear time per cutset," J. Assoc. Comput. Mach., vol.27, pp.619_632, 1980.

[3] D. Rotem and J. Urrutia, "Finding maximum cliques in circle graphs," Networks, vol.11, pp.269_278, 1981.

[4] J. Y. T. Leung, "Fast algorithm for generating all maximal independent sets of interval, circular-arc and chordal graphs," J. Algorithms, vol.5, pp.22_35, 1984.

[5] S. Masuda, K. Nakajima, T. Kashiwahara, and T. Fujisawa, "Efficient algorithms for finding maximum cliques of an overlap graphs," Networks, vol.20, pp.157_171, 1990.

[6] Y. D. Liang, S. K. Dhall, and S. Lakshmivaraham, "On the problem of finding all maximum weight independent sets in interval and circular-arc graphs," 1991 Symposium on Applied Computing, pp.465_470, IEEE Comput. Soc. Press, 1991.

[7] T. Kashiwahara, S. Masuda, K. Nakajima, and T. Fujisawa, "Generation of maximum independent sets of a bipartite graph and maximum cliques of a circular-arc graph," J. Algorithm, vol.13, pp.161_174, 1992.

[8] M. Taki, S. Masuda, T. Kashiwahara, "A Representation Diagram for Maximal Independent Sets of a Graph," IEICE Transactions, Vol. E81-A , No. 5 , 1998.

[9] M. C. Golubic, "Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs," Academic Press, San Diego, CA, 1980.

[10] J. Spinrad, "On comparability and permutation graphs," SIAM J. Comput., vol.14, pp.658_670, 1985.

[11] A. V. Aho, M. R. Garey, and J. D. Ullman, "The transitive reduction of directed graph," SIAM J. Comput., vol.1, pp.131_137, 1972.

[12] V. Bouchitte, and I. Todince, "Listing all Potential Maximal Cliques of a Graph," Lecture Note in Computer Science, pp503_515, Vol.1770, 2000.