弱 t-ノルム代数と t-コノルム代数のシーケントによる形式化

荒金　憲一

Sequential formulations for weak t-norm algebras and t-conorm algebras

Kenichi ARAGANE

ファジイ集合において AND と OR を一般化した, t-ノルムと t-コノルムが [3], [5] などで定義されている．また，[1] においては，t-ノルムよりも弱い形で弱 t-ノルムが定義されている．w と S は [0, 1] 上の 2 項演算とする．$w(a, 1) \leq a$；$w(1, b) = b$；$a \leq c, b \leq d$ ならば $w(a, b) \leq w(c, d)$ を満たすものが weak triangular norm（弱 t-ノルム）である．また，$S(a, b) = S(b, a)$；$S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c))$；$S(a, 1) = 1$；$S(a, 0) = a$；$a \leq c, b \leq d$ ならば $S(a, b) \leq S(c, d)$ を満たすものが triangular conorm（t-コノルム）である．本論文では，[4] で t-ノルムを扱ったのと同じ方法（ただし, 含意（⊃）を考えない）で弱 t-ノルム，t-コノルムのもつ性質を抽象化した代数系として弱 t -ノルム代数（WTNA），t-コノルム代数（TCNA）を定義し, G. Gentzen の方法（[2]）でのシーケントによる形式的体系 GWTNA，GTCNA を考える．

§1　ワード

[定義 1]　（ワードの定義）

(1)　定数 0, 1 はワードである．

(2)　変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ はワードである．

(3)　x と y がワードのとき $x * y$, $x \vee y$, $x \wedge y$ はワードである．

(4)　以上の (1), (2), (3) によって構成された記号列のみがワードである．

ワード全体の集合を D とする．2 項演算 $*$，$\vee$，$\wedge$ と 2 項関係 $\leq$ をもつ代数系 $\mathbf{A} = (D; 0, 1, *, \vee, \wedge, \leq)$ を考える．$\mathbf{A}$ では D の任意の元 x, y, z に対して, 次の等号に関する規則が使えるものとする．

$E1$　$x = x$

$E2$　$x = y \Longrightarrow y = x$

$E3$　$x = y,\ y = z \Longrightarrow x = z$

$E4$　$x = y,\ x \leq z \Longrightarrow y \leq z$

$E4^\circ$　$x = y,\ z \leq x \Longrightarrow z \leq y$

EW　$x = y \Longrightarrow x * z = y * z$

EW°　$x = y \Longrightarrow z * x = z * y$

EC　$x = y \Longrightarrow x \vee z = y \vee z$

ET　$x = y \Longrightarrow x \wedge z = y \wedge z$

§2　WTNA

代数系 $\mathbf{A_w} = (D; 0, 1, *, \leq)$ を考える．

[定義 2]　（WTNA の定義）

D の任意の元 x, y, z, u, v に対して, 次の $F1$ ～ $F4$ と $W1$ ～ $W3$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{A_w}$ を弱 t-ノルム代数

（WTNA）とよぶ.

$F1$　$0 \leq x$

$F1^\circ$　$x \leq 1$

$F2$　$x \leq x$

$F3$　$x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x = y$

$F4$　$x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$W1$　$x \leq u$, $y \leq v \Rightarrow x * y \leq u * v$

$W2$　$x * 1 \leq x$

$W3$　$1 * x = x$

[注意 1]

(1)（ EW かつ EW°）$\Longleftrightarrow$（$x = y, u = v \Longrightarrow x * u = y * v$）

(2) $W1 \Longleftrightarrow [\, x \leq y \Longrightarrow (\, x * z \leq y * z$ かつ $z * x \leq z * y\,)]$

(3) $x * y \leq x$, $x * y \leq y$

(4) $x * y = x \Longrightarrow x \leq y$

(5) $F1 \Longleftrightarrow 0 * x = x * 0 = 0$

（ 証明 ）

(1)：$\Longrightarrow$ について．$x = y$, $u = v$ とすると $x * u = y * u = y * v$ から成り立つ． $\Longleftarrow$ について．$x = y$ とすると　$z = z$ から $x * z = y * z$ と $z * x = z * y$ が成り立つ.

(2)：$\Longrightarrow$ について．$x \leq y$ とすると $z \leq z$ で, $W1$ より $x * z \leq y * z$ と $z * x \leq z * y$ が成り立つ． $\Longleftarrow$ について．$x \leq u$, $y \leq v$ とする．仮定から $x * y \leq u * y \leq u * v$ で成り立つ.

(3)：$x \leq x$, $y \leq 1$ で $W1, W2$ を使うと $x * y \leq x * 1 \leq x$ より成り立つ．また, $x \leq 1$, $y \leq y$ で $W1, W3$ を使うと $x * y \leq 1 * y = y$.

(4)：上の(3)の $x * y \leq y$ で仮定と $E4$ から $x \leq y$ が成り立つ.

(5)：$\Longrightarrow$ について．上の(3)から $0 * x \leq 0$, $x * 0 \leq 0$. また, 仮定 $F1$ より $0 \leq 0 * x$, $0 \leq x * 0$. よって, $F3$ から $0 * x = x * 0 = 0$ が成り立つ． $\Longleftarrow$ について．仮定 $0 * x = 0$ に上の(4)を使うと $0 \leq x$.　（ 証明終 ）

[定義 3]（$\models$ の定義）

x, y を D の任意の元とする．WTNA で不等式 $x \leq y$ が成り立つとき, $\models x \leq y$ と書く.

§ 3　GWTNA

WTNA では、結合法則と交換法則が成り立たないから, シーケントの左辺と右辺のワードは共にちょうど 1 個ずつとする.

[定義 4]（シーケントの定義）

x , y をワードとするとき, WTNA での不等式 $x \leq y$ を $x \rightarrow y$ で表し, これをシーケントとよぶ.

[4] と同様に弱 t-ノルム代数のシーケントによる形式化を考える.

[定義 5]（GWTNA の定義）

弱 t-ノルム代数（WTNA）のシーケントによる形式的体系 GWTNA を次のように定義する.

[1]　始シーケント：

（$B1$）$x \rightarrow x$

（$B2$）$0 \rightarrow x$

（$B3$）$x \rightarrow 1$

（$B4$）$x \rightarrow 1 * x$

[2] 推論規則：

⑴ 構造上の推論規則：

切 (cut) の規則 $$\frac{x \to y \quad y \to z}{x \to z}\ (c)$$

⑵ 演算に関する推論規則：

$$\frac{x \to y}{x * z \to y}\ (*_1 \to) \qquad \frac{x \to y}{z * x \to y}\ (*_2 \to)$$

$$\frac{x \to y \quad u \to v}{x * u \to y * v}\ (* \to *)$$

[定義６] （⊢ の定義）

シーケント $x \to y$ が GWTNA で証明可能であるとき, $\vdash x \to y$ と書く.

[注意２] 次の同値性が成り立つ.

$$\frac{1 \to x \quad x * y \to z}{y \to z}\ (c_1) \iff \frac{1 * x \to y}{x \to y}\ (1 \to) \iff \vdash x \to 1 * x\ (B4)$$

（ 証明 ）

$(c_1) \Longrightarrow (1 \to)$： $$\frac{1 \to 1 \quad 1 * x \to y}{x \to y}$$

$(1 \to) \Longrightarrow (B4)$： $$\frac{1 * x \to 1 * x}{x \to 1 * x}$$

$(B4) \Longrightarrow (c_1)$： $$\cfrac{\cfrac{y \to 1 * y \quad \cfrac{1 \to x \quad y \to y}{1 * y \to x * y}}{y \to x * y} \quad x * y \to z}{y \to z}$$

[注意３] $(B4) \Rightarrow (B3)$

（ 証明 ） $$\cfrac{x \to 1 * x \quad \cfrac{1 \to 1}{1 * x \to 1}}{x \to 1}$$

（ 証明終 ）

§ 4 WTNA と GWTNA の演繹的同値性

[定義７] （WTNA での等号の定義）

$\vdash x \to y$ かつ $\vdash y \to x$ のとき $x \equiv y$ とすれば, $\equiv$ は同値関係である. そこで $D/\equiv$ をあらためて D とし, $\equiv$ を $=$ とみなしたものを WTNA での等号とする.

[注意４]

WTNA では 等号に関する規則 $E1$ ～ $E4^\circ$ と EW, EW° が成り立つ.

（ 証明 ）

$\equiv$ が同値関係であることは, 次の $E1$, , $E2$, , $E3$ からいえる.

$(E1)$： 始シーケント $(B1)$ から成り立つ.

$(E2)$： $x = y$ とすると $y \to x$ かつ $x \to y$ から $y = x$ が成り立つ.

$(E3)$： $x = y$ かつ $y = z$ とすると $\dfrac{x \to y \quad y \to z}{x \to z}$ $\dfrac{z \to y \quad y \to x}{z \to x}$ より $x = z$ が成り立つ.

$(E4)$：　$x = y$, $x \leq z$ とすると $\dfrac{y \to x \qquad x \to z}{y \to z}$

$(E4^{\circ})$：　$x = y$, $z \leq x$ とすると $\dfrac{z \to x \qquad x \to y}{z \to y}$

(EW)：　$x = y$ とすると $\dfrac{x \to y \qquad z \to z}{x * z \to y * z}$ 　　$\dfrac{y \to x \qquad z \to z}{y * z \to x * z}$

(EW°)：$x = y$ とすると $\dfrac{z \to z \qquad x \to y}{z * x \to z * y}$ 　　$\dfrac{z \to z \qquad y \to x}{z * y \to z * x}$ 　（証明終）

[4] と同様に次の 3 つの定理が成り立つ.

[定理 1]

x , y がワードのとき, $\vDash x \leq y \implies \vdash x \to y$

（証明）

WTNA の公理をシーケントにしたものが GWTNA で証明可能であることを示せばよい.

$(F1)$：　始シーケント $(B2)$から成り立つ.

$(F1^{\circ})$：　始シーケント $(B3)$ から成り立つ.

$(F2)$：　始シーケント $(B1)$ から成り立つ.

$(F3)$：　[定義 7]から明らかである.

(F4)：　$\dfrac{x \to y \qquad y \to z}{x \to z}$

$(W1)$：　$\dfrac{x \to u \qquad y \to v}{x * y \to u * v}$

$(W2)$：　$\dfrac{x \to x}{x * 1 \to x}$

$(W3)$：　$\dfrac{x \to x}{1 * x \to x}$ 　と $(B4)$から成り立つ. 　（証明終）

[定理 2]

x , y がワードのとき, $\vdash x \to y \implies \vDash x \leq y$

（証明）

[1]　始シーケントについて：

$(B1)$：　$(F2)$ から成り立つ.

$(B2)$：　$(F1)$ から成り立つ.

$(B3)$：　$(F1^{\circ})$ から成り立つ.

[2]　推論規則について：

(c)：$x \leq y$, $y \leq z$ とすると $(F4)$ から $x \leq z$.

$(*_1 \to)$：$x \leq y$ とすると [注意 1] の (3) から $x * z \leq x$ で $x * z \leq y$ が成り立つ.

$(*_2 \to)$：$x \leq y$ とすると [注意 1] の (3) から $z * x \leq x$ で $z * x \leq y$ が成り立つ.

$(* \to *)$：$x \leq y$, $u \leq v$ とすると $W1$ から $x * u \leq y * v$ が成り立つ. 　（証明終）

[定理 1]と[定理 2]から次の定理が成り立つ.

[定理 3]　WTNA と GWTNA は演繹的に同値である.

§5　TCNA

代数系 $\mathbf{Ac}$ =（D; 0, 1, $\vee$, $\leq$）を考える.

[定義8]（TCNAの定義）

D の任意の元 x , y , z , u , v に対して,［定義2］の $F1$ ～ $F4$ と次の $C1$ ～ $C4$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{Ac}$ を t-コノルム代数（TCNA）とよぶ.

$C1$　$x \leq u$, $y \leq v \implies x \vee y \leq u \vee v$

$C2$　$x \vee 0 = x$

$C3$　$x \vee y = y \vee x$

$C4$　$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

[注意5]

(1)　$EC \Leftrightarrow (x = y,\ u = v \implies x \vee u = y \vee v)$

(2)　$C1 \Leftrightarrow (x \leq y \implies x \vee z \leq y \vee z)$

(3)　$x \leq x \vee y$,　$y \leq x \vee y$

(4)　$x \vee y = y \implies x \leq y$

(5)　$F1^{\circ} \Leftrightarrow x \vee 1 = 1$

（証明）

(1)：$\Longrightarrow$ について. $x = y$, $u = v$ とすると仮定 EC と $C3$ から $x \vee u = y \vee u = u \vee y = v \vee y = y \vee v$.
$\Longleftarrow$ について. $x = y$ とすると $z = z$ から $x \vee z = y \vee z$.

(2)：$\Longrightarrow$ について. $x \leq y$ とすると $z \leq z$ で, 仮定から $x \vee z \leq y \vee z$.　$\Longleftarrow$ について. $x \leq u$, $y \leq v$ とすると仮定と $C3$ から $x \vee y \leq u \vee y = y \vee u \leq v \vee u = u \vee v$ で成り立つ.

(3)：$x \leq x$, $0 \leq y$ に $C2$, $C1$ を使うと $x = x \vee 0 \leq x \vee y$. また, $0 \leq x$, $y \leq y$ に $C2$, $C3$, $C1$ を使うと $y = y \vee 0 = 0 \vee y \leq x \vee y$.

(4)：上の(3)の $x \leq x \vee y$ に $E4^{\circ}$を使って, 仮定の式を代入すると $x \leq y$.

(5)：$\Longrightarrow$ について. 上の(3)から $1 \leq x \vee 1$. また, 仮定 $F1^{\circ}$より $x \vee 1 \leq 1$ から $x \vee 1 = 1$ が成り立つ. $\Longleftarrow$ について. 仮定に上の(4)を使うと成り立つ.　（証明終）

［定義3］と同様に TCNA で不等式 $x \leq y$ が成り立つとき, $\models x \leq y$ と書く.

§6　GTCNA

[4] と同様にシーケントを定義する

[定義9]（シーケントの定義）

(1)　ワードの有限列をギリシア大文字 Γ, Δ などで表す.

(2)　ワードの有限列 $b_1, \ldots, b_n$ を Γ とし, a をワードとするとき, TCNA での不等式 $a \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を $a \to \Gamma$ で表し, これをシーケントとよぶ. ただし, a は 空でないとする. また, Γ が空のとき（$\Gamma = \emptyset$ と書く）は, $a \leq 0$ とする.

[4] と同様に t-コノルム代数のシーケントによる形式化を考える.

[定義10]（GTCNAの定義）

t-コノルム代数（TCNA）のシーケントによる形式的体系 GTCNA を次のように定義する.

[1]　始シーケント：

（$B1$）$x \to x$

（$B2$）$0 \to x$

（$B3$）$x \to 1$

（$B5$）$x \vee 0 \to x$

［2］ 推論規則：

⑴ 構造上の推論規則：

（1. 1）増（ weakening ）の規則

$$\dfrac{a \to \Gamma}{a \to \Gamma, b}\,(\to w)$$

（1.2）換（ exchanging ）の規則

$$\dfrac{a \to \Gamma, b, c, \Delta}{a \to \Gamma, \mathrm{c}, b, \Delta}\,(\to e)$$

（1.3）切（ cut ）の規則

$$\dfrac{a \to \Gamma, c \qquad c \to \Delta}{a \to \Gamma, \Delta}\,(\to c_2)$$

⑵ 演算に関する推論規則：

$$\dfrac{a \to \Gamma, b, c}{a \to \Gamma, b \vee c}\,(\to \vee) \qquad \dfrac{a \to \Gamma \quad b \to \Delta}{a \vee b \to \Gamma, \Delta}\,(\vee \to)$$

［定義6］と同様にシーケント $x \to y$ が GTCNA で証明可能であるとき，$\vdash x \to y$ と書く.

［注意6］ 次の同値性が成り立つ.

$$\dfrac{a \to \Gamma, c \qquad c \to 0}{a \to \Gamma}\,(c_3) \Leftrightarrow \dfrac{a \to \Gamma, 0}{a \to \Gamma}\,(\to 0) \Leftrightarrow \vdash x \vee 0 \to x \ (B5)$$

（ 証明 ）

$(c_3) \Longrightarrow (\to 0)$： $\dfrac{a \to \Gamma, 0 \qquad 0 \to 0}{a \to \Gamma}$

$(\to 0) \Longrightarrow (B5)$： $\dfrac{\dfrac{x \to x \qquad 0 \to 0}{x \vee 0 \to x, 0}}{x \vee 0 \to x}$

$(B5) \Longrightarrow (c_3)$： $\Gamma = b_1, \dots, b_n$ とする.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \to b_1, \dots, b_n, c \quad c \to 0}{a \to b_1, \dots, b_n, 0}\,(c_2)}{a \to b_1 \vee \cdots \vee b_n \vee 0} \qquad b_1 \vee \cdots \vee b_n \vee 0 \to b_1 \vee \cdots \vee b_n}{a \to b_1 \vee \cdots \vee b_n} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{b_1 \to b_1 \quad b_2 \to b_2}{b_1 \vee b_2 \to b_1, b_2}}{\vdots}}{b_1 \vee \cdots \vee b_n \to b_1, \dots, b_n}}{a \to b_1, \dots, b_n}$$

（ 証明終 ）

［注意7］ $(B5) \Longrightarrow (B2)$

（ 証明 ）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0 \to 0}{0 \to 0, x}}{0 \to x, 0}}{0 \to x \vee 0} \quad x \vee 0 \to x}{0 \to x}$$

（ 証明終 ）

§7 TCNA と GTCNA の演繹的同値性

［定義7］と同様に $\vdash x \to y$ かつ $\vdash y \to x$ のとき $x \equiv y$ とし，$D/_{\equiv}$ をあらためて D として $\equiv$ を $=$ とみなしたものを TCNA での等号とする.

[注意 8]
TCNA では 等号に関する規則 $E1 \sim E4^\circ$ と EC が成り立つ.
（ 証明 ）
$\equiv$ が同値関係であることと $E1 \sim E4^\circ$ については, [注意 4] と同様にできる.
（EC）: $x = y$ とする.

$$\dfrac{\dfrac{x \to y \quad z \to z}{x \vee z \to y, z}}{x \vee z \to y \vee z} \qquad \dfrac{\dfrac{y \to x \quad z \to z}{y \vee z \to x, z}}{y \vee z \to x \vee z}$$

（ 証明終 ）

WTNA の場合と同様に次の 3 つの定理が成り立つ.
[定理 4] x , y がワードのとき, $\vDash x \leq y \implies \vdash x \to y$
（ 証明 ）
$F1 \sim F4$ は [定理 1] と同様にできる.
($C1$) :

$$\dfrac{\dfrac{x \to u \quad y \to v}{x \vee y \to u\, ,\, v}}{x \vee y \to v \vee v}$$

($C2$) :

$$\dfrac{\dfrac{x \to x}{x \to x, 0}}{x \to x \vee 0}$$

（$B5$）から $\vdash x \vee 0 \to x$.

($C3$) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \to x \quad y \to y}{x \vee y \to x, y}}{x \vee y \to y, x}}{x \vee y \to y \vee x} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{y \to y \quad x \to x}{y \vee x \to y, x}}{y \vee x \to x, y}}{y \vee x \to x \vee y}$$

(C4) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \to x \quad y \to y}{x \vee y \to x, y} \quad z \to z}{(\, x \vee y\,) \vee z \ \to x, y, z}}{(\, x \vee y\,) \vee z \to x, y \vee z}}{(\, x \vee y\,) \vee z \to x \vee (\, y \vee z\,)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x \to x \quad \dfrac{y \to y \quad z \to z}{y \vee z \to y, z}}{x \vee (\, y \vee z\,) \to x, y, z}}{x \vee (\, y \vee z\,) \to (\, x \vee y\,), z}}{x \vee (\, y \vee z\,) \to (\, x \vee y\,) \vee z}$$

（ 証明終 ）

[定理 5] $a, b_1, \ldots, b_n$ がワードのとき, $\vdash\ a \to b_1, \ldots, b_n \implies \vDash\ a \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$
（ 証明 ）
[1] 始シーケントについて :
($B1$) ～ ($B3$) については [定理 2] と同様にできる.
($B5$) : ($C2$) から成り立つ.
[2] 推論規則について :
ワードの有限列 Γ が $b_1, \ldots, b_n$ のとき, $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を x などと書くことにする.
($\to w$) : $a \leq x$ とすると [注意 5] の(3)から $x \leq x \vee b$ で $a \leq x \vee b$ が成り立つ. $x = \emptyset$ のとき. $a \leq 0$ とすると $F1$ から $0 \leq b$ で $a \leq b$ が成り立つ.
($\to e$) : $a \leq x \vee b \vee c \vee y$ とする. $C3, C4$ から $x \vee b \vee c \vee y = x \vee c \vee b \vee y$ で $a \leq x \vee c \vee b \vee y$ が成り立つ.
(c_2) : $a \leq x \vee c,\ c \leq y$ とする.
(1) $x \neq \emptyset$ かつ $y \neq \emptyset$ のとき. $x \leq x$, $c \leq y$ に $C1$ を使うと $x \vee c \leq x \vee y$ で $a \leq x \vee y$ が成り立つ.
(2) $x = \emptyset$ かつ $y \neq \emptyset$ のとき. $a \leq c,\ c \leq y$ とすると $F4$ から $a \leq y$ が成り立つ.
(3) $x \neq \emptyset$ かつ $y = \emptyset$ のとき. $a \leq x \vee c,\ c \leq 0$ とする. $x \leq x$, $c \leq 0$ に $C1$ を使うと $x \vee c \leq x \vee 0$. $C2$ より $x \vee 0 = x$ で $x \vee c \leq x$ から $a \leq x$ が成り立つ.
(4) $x = \emptyset$ かつ $y = \emptyset$ のとき. $a \leq c,\ c \leq 0$ とすると $F4$ から $a \leq 0$ が成り立つ.
($\to \vee$) : $a \leq x \vee b \vee c$ とすると $C4$ から $x \vee b \vee c = x \vee (\, b \vee c\,)$ で $a \leq x \vee (\, b \vee c\,)$ が成り立つ.

$(\vee\rightarrow)$：$a \leq x$，$b \leq y$ とすると $C1$ から $a \vee b \leq x \vee y$ が成り立つ．$x = \emptyset$ または $y = \emptyset$ のときは，$C1$, $C2$ から成り立つ．（証明終）

［定理4］と［定理5］から次の定理が成り立つ．

［定理6］ TCNA と GTCNA は演繹的に同値である．

§8　TNA

代数系 $\mathbf{A_T} = (D\ ;\ 0, 1, \wedge, \leq)$ を考えると，TCNA と双対に，[4] において t-ノルム代数（TNA）は，次のように定義されている．

[定義11]（TNA の定義）

D の任意の元 x，y，z，u，v に対して，定義2の $F1$ ～ $F4$ と次の $T1$ ～ $T4$ が成り立つとき，代数系 $\mathbf{A_T}$ を t-ノルム代数（TNA）とよぶ．

$T1$　$x \leq u,\ y \leq v \Longrightarrow x \wedge y \leq u \wedge v$

$T2$　$x \wedge 1 = x$

$T3$　$x \wedge y = y \wedge x$

$T4$　$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

[1]と同様に次のことが成り立つ．

［注意9］

代数系 $\mathbf{A}$ が $F1$ ～ $F4$, $C1$ ～ $C4$, $T1$ ～ $T4$ を満たすとする．$w(x,\ y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (x \wedge y) \wedge (x \vee y)$ とおくと，次の (1), (2), (3), (4) が成り立つ．

(1)　$w(x, 1) = x$

(2)　$w(1,\ y) = y$

(3)　$w(x,\ y) = w(y,\ x)$

(4)　$w(x,\ y)$ は 弱 t-ノルム代数の公理を満たす．

（証明）

(1)：［注意5］の(5)より $x \vee 1 = 1$ であるから $w(x, 1) = (x \wedge 1) \wedge (x \vee 1) = x \wedge 1 = x$．

(2)：$w(1,\ y) = (1 \wedge y) \wedge (1 \vee y) = y \wedge 1 = y$．

(3)：$C3$ と $T3$ から明かである．

(4)：$x \leq u$，$y \leq v$ とする．$x \wedge y \leq u \wedge v$ かつ $x \vee y \leq u \vee v$ より $(x \wedge y) \wedge (x \vee y) \leq (u \wedge v) \wedge (u \vee v)$ で $w(x,\ y) \leq w(u,\ v)$ が成り立つ．これと上の (1), (2) から $w(x,\ y)$ は 弱 t-ノルム代数の公理を満たす．（証明終）

参考文献

[1] János C. Fodor, *Strict preference relations based on weak t-norms*, Fuzzy Sets and Systems, 43 (1991), 327-336.

[2] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen* I, II, Mathematische Zeitschrift 39 (1935), 176-210, 405-431.

[3] 堀内清光, ファジィ数学, 大阪教育図書, 1998.

[4] 竹村康・荒金憲一, t-ノルム代数のシーケントによる形式化, 大阪産業大学論集 自然科学編 第92号 (1993), 19-22.

[5] 田中英夫, ファジィモデリングとその応用, 朝倉書店, 1990.