準ストーン代数のシーケントによる形式化

荒金 憲一

Sequential formulations for quasi-Stone algebras

Kenichi ARAGANE

最小元 0 と最大元 1 をもつ分配束 (bounded distributive lattice：BDL) でド・モルガン律 ($F9$ の$\neg y$ を y にしたものと $F9°$) と 2 重否定律 ($\neg\neg x = x$) を満たす代数系がド・モルガン代数 (De Morgan algebra ; [6] の弱ファジー集合算と同じ)である．また，BDL でド・モルガン律と半 2 重否定律 ($F8$, $F8°$) と最小元・最大元に関する補元律 ($F10$, $F10°$) と矛盾律 ($F11$) を満たす代数系がストーン代数 (Stone algebra ; [4] の擬ファジイ代数(PFA)と同じ)である．[7] で定義されている準ストーン代数(quasi-Stone algebra：QSA)は，ストーン代数の中の $\wedge$ に関するド・モルガン律を弱めた形 ($F9$) にした代数系である．ド・モルガン代数およびストーン代数に演繹的に同値な，G. Gentzen の方法 ([5]) でのシーケント(式)による形式的体系 GWFS と GSA は [6], [3]でそれぞれ与えられている．本論文では，準ストーン代数で成り立つ性質を調べる．そして準ストーン代数に演繹的に同値な，シーケントによる形式的体系 GQSA を考える．

§1 ワード

[3], [6] と同様にワードを定義する.

[定義１] (ワードの定義)

(1) 定数 0, 1 はワードである.

(2) 変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ はワードである.

(3) x と y がワードのとき $x \wedge y$, $x \vee y$, $\neg x$ はワードである.

(4) 以上の (1), (2), (3) によって構成された記号列のみがワードである.

ワード全体の集合を A とし，2 項演算 $\vee$, $\wedge$ と 1 項演算 $\neg$ をもつ代数系 $\mathbf{A} = (A\ ;\ 0,\ 1,\ \vee,\ \wedge,\ \neg)$ を考える.

§2 準ストーン代数(QSA)

[定義２] (QSA の定義)

A の任意の元 x, y, z に対して，次の $F1 \sim F11$ が成り立つとき，代数系 $\mathbf{A}$ を準ストーン代数(QSA)とよぶ([7]).

$F1$	$x \wedge 0 = 0$	$F1°$	$x \vee 1 = 1$
$F2$	$x \wedge 1 = x$	$F2°$	$x \vee 0 = x$
$F3$	$x \wedge x = x$	$F3°$	$x \vee x = x$
$F4$	$x \wedge y = y \wedge x$	$F4°$	$x \vee y = y \vee x$
$F5$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$F5°$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$F6$	$x \wedge (x \vee y) = x$	$F6°$	$x \vee (x \wedge y) = x$
$F7$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$F7°$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$F8$	$x \wedge \neg\neg x = x$	$F8°$	$x \vee \neg\neg x = \neg\neg x$
$F9$	$\neg(x \wedge \neg y) = \neg x \vee \neg\neg y$	$F9°$	$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

$F10$ $\neg\, 0 = 1$ $F10^\circ$ $\neg\, 1 = 0$

$F11$ $x \wedge \neg\, x = 0$

［定義３］（不等式の定義）
x, y を A の任意の元とする．$x \wedge y = x$ が成り立つとき，$x \leq y$ と書く．

[3], [6] と同様にして，次の定理が成り立つ．

［定理１］ 代数系 $\mathbf{A}$ が 準ストーン代数(QSA)であり（つまり $F1 \sim F11$ が成り立つ)，かつ定義３により $x \leq y$ が定義される $\Longleftrightarrow$ A の任意の元 x, y, z に対して $\mathbf{A}$ で次の $T1 \sim T13$ が成り立つ．

$T1$ $x \leq x$

$T2$ $x \leq y, y \leq x \Longleftrightarrow x = y$

$T3$ $x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$

$T4$ $x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$

$T5$ $0 \leq x$ $T5^\circ$ $x \leq 1$

$T6$ $x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y$ $T6^\circ$ $x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y$

$T7$ $z \leq x, z \leq y \Longrightarrow z \leq x \wedge y$ $T7^\circ$ $x \leq z, y \leq z \Longrightarrow x \vee y \leq z$

$T8$ $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ $T8^\circ$ $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$

$T9$ $x \leq \neg\, y \Longrightarrow y \leq \neg\, x$

$T10$ $x \leq \neg\neg\, x$

$T11$ $\neg\,(x \wedge \neg\, y) \leq \neg\, x \vee \neg\neg\, y$ $T11^\circ$ $\neg\, x \wedge \neg\, y \leq \neg\,(x \vee y)$

$T12$ $\neg\, 1 \leq x$

$T13$ $x \wedge \neg\, x \leq 0$

（証明）

$\Longrightarrow$：

$T1 \sim T8^\circ$ と $T10$ と $T11^\circ$ と $T12$ は [3] の定理１の証明と同じである．

$T9$：$x \leq \neg\, y$ とすると 定義３より $x \wedge \neg\, y = x$. この両辺に否定をとると $F9$ から $\neg\, x \vee \neg\neg\, y = \neg\, x$ で $T4$ から $\neg\neg\, y \leq \neg\, x$. また $T10$ から $y \leq \neg\neg\, y$. よって $T3$ を使って $y \leq \neg\, x$ が成り立つ．

$T11$：$F9$ と $T2$ から $\neg\,(x \wedge \neg\, y) \leq \neg\, x \vee \neg\neg\, y$ が成り立つ．

$T13$：[3] の定理４の証明と同様に $F11$, $T2$ から成り立つ．

$\Longleftarrow$：

定義３により $x \leq y$ が定義されることと $F1 \sim F8^\circ$ と $F10^\circ$ は [3] の定理１の証明と同じである．

$F9$：$T6$ と $T10$ より $x \wedge \neg\, y \leq x \leq \neg\neg\, x$, $x \wedge \neg\, y \leq \neg\, y \leq \neg\neg\neg\, y$ で $T3$ と $T9$ を使うと $\neg\, x \leq \neg\,(x \wedge \neg\, y)$, $\neg\neg\, y \leq \neg\,(x \wedge \neg\, y)$. これらに $T7^\circ$ を使うと $\neg\, x \vee \neg\neg\, y \leq \neg\,(x \wedge \neg\, y)$. これと $T11$ に $T2$ を使って $\neg\,(x \wedge \neg\, y) = \neg\, x \vee \neg\neg\, y$ が成り立つ．

$F9^\circ$：$T6^\circ$ と $T10$ より $x \leq x \vee y \leq \neg\neg\,(x \vee y)$, $y \leq x \vee y \leq \neg\neg\,(x \vee y)$ で $T3$ と $T9$ を使うと $\neg\,(x \vee y) \leq \neg\, x$, $\neg\,(x \vee y) \leq \neg\, y$. これらに $T7$ を使うと $\neg\,(x \vee y) \leq \neg\, x \wedge \neg\, y$. これと $T11^\circ$ に $T2$ を使って $\neg\,(x \vee y) = \neg\, x \wedge \neg\, y$ が成り立つ．

$F10$：$T5^\circ$ より $\neg\, 0 \leq 1$. また $T5$ から $0 \leq \neg\, 1$ で $T9$ を使うと $1 \leq \neg\, 0$. よって $T2$ から $\neg\, 0 = 1$ が成り立つ．

$F11$：[3] の定理４の証明と同様に $T5$, $T13$, $T2$ から成り立つ． （証明終）

[3] の注意３と同様に次の単調性が成り立つ．

［注意１］ 束($T1 \sim T4$ と $T6 \sim T7^\circ$ が成り立つ)において，次の (1), (2) が成り立つ．

(1) $x \leq y, u \leq v \Longrightarrow x \wedge u \leq y \wedge v$（$\wedge$ についての単調性）

(2) $x \leq y, u \leq v \Longrightarrow x \vee u \leq y \vee v$（$\vee$ についての単調性）

［注意２］ BDL において，次の (1)〜(6) が成り立つ．

(1) $(T9)\,(x \leq \neg\, y \Longrightarrow y \leq \neg\, x) \Longrightarrow$ $(x \leq \neg\neg\, x$ かつ $\neg\neg\neg\, x = \neg\, x)$

(2) $(T9) \Longleftrightarrow [x \leq \neg\neg\, x$ かつ $(x \leq y \Longrightarrow \neg\, y \leq \neg\, x)]$

(3) $(T9) \Longleftrightarrow [x \leq \neg\neg\, x$ かつ $\neg\,(x \wedge \neg\, y) \geq \neg\, x \vee \neg\neg\, y]$

(4) $(T9) \Longleftrightarrow [x \leq \neg\neg\, x$ かつ $\neg\,(x \vee y) = \neg\, x \wedge \neg\, y]$

(5) $[(T9)$ かつ $x \wedge \neg\, x = 0$ かつ $\neg\, x \vee \neg\neg\, x = 1] \Longrightarrow \neg\,(x \wedge \neg\, y) \leq \neg\, x \vee \neg\neg\, y$

(6) $\neg\, x \vee \neg\neg\, x = 1$ が成り立つとき

$[(T9)$ かつ $x \wedge \neg\, x = 0] \Longleftrightarrow [x \leq \neg\neg\, x$ かつ $\neg\, 0 = 1$ かつ $(x \wedge \neg\, y = 0 \Longleftrightarrow \neg\, y \leq \neg\, x)]$

(証明)

(1)：$T1$ より $\neg\, x \leq \neg\, x$ で仮定を使って $x \leq \neg\neg\, x$ が成り立つ. 次に $x \leq \neg\neg\, x$ で x を $\neg\, x$ にすれば $\neg\, x \leq \neg\neg\neg\, x$. さらに $x \leq \neg\neg\, x \leq \neg\neg\neg\neg\, x$ で $T3$ と 仮定から$\neg\neg\neg\, x \leq \neg\, x$. よって $T2$ から $\neg\neg\neg\, x = \neg\, x$ が成り立つ.

(2)：[3]の注意 2 の(1)の証明と同じである.

(3)：$\Longrightarrow$：(1) より $x \leq \neg\neg\, x$ が成り立つ. 上の定理 1 の $\Longleftarrow$ での $F9$ の証明と同じで $\neg\, x \vee \neg\neg\, y \leq \neg\,(x \wedge \neg\, y)$ が成り立つ.

$\Longleftarrow$：$x \leq \neg\, y$ とすると定義 3 から $x \wedge \neg\, y = x$ で両辺に否定をとると仮定から$\neg\, x \vee \neg\neg\, y \leq \neg\, x$. また $T6^\circ$ から $\neg\, x \leq \neg\, x \vee \neg\neg\, y$ で $T2$ を使って$\neg\, x \vee \neg\neg\, y = \neg\, x$.よって $T4$ から$\neg\neg\, y \leq \neg\, x$. 仮定から $y \leq \neg\neg\, y$ で $T3$ により $y \leq \neg\, x$ が成り立つ.

(4)：$\Longrightarrow$：上の定理 1 の $\Longleftarrow$ での $F9^\circ$ の証明と同じで $\neg\,(x \vee y) \leq \neg\, x \wedge \neg\, y \cdots$①. 次に $T6$ より$\neg\, x \wedge \neg\, y \leq \neg\, x \leq \neg\neg\neg\, x$ で $T3$ と仮定から$\neg\neg\, x \leq \neg\,(\neg\, x \wedge \neg\, y)$. $x \leq \neg\neg\, x$ と $T3$ から $x \leq \neg\,(\neg\, x \wedge \neg\, y)$. 同様にして$\neg\, x \wedge \neg\, y \leq \neg\, y \leq \neg\neg\neg\, y$ から $y \leq \neg\neg\, y \leq \neg\,(\neg\, x \wedge \neg\, y)$. $T7^\circ$を使って $x \vee y \leq \neg\,(\neg\, x \wedge \neg\, y)$. 仮定から$\neg\, x \wedge \neg\, y \leq \neg\,(x \vee y) \cdots$②. ①, ② に $T2$ を使って$\neg\,(x \vee y) = \neg\, x \wedge \neg\, y$ が成り立つ.

$\Longleftarrow$：$x \leq \neg\, y$ とすると $T4$ から $x \vee \neg\, y = \neg\, y$ で $\neg\,(x \vee \neg\, y) = \neg\neg\, y$. 仮定から$\neg\, x \wedge \neg\neg\, y = \neg\neg\, y$. よって定義 3 から$\neg\neg\, y \leq \neg\, x$. 仮定より $y \leq \neg\neg\, y$ で $T3$ から $y \leq \neg\, x$ が成り立つ.

(5)：(4) の$\neg(x \vee y) = \neg\, x \wedge \neg\, y$ を使う. $a = x \wedge \neg\, y$ とおく. $x = x \wedge 1 = x \wedge (\neg\,(y \vee a) \vee \neg\neg\,(y \vee a)) = (x \wedge \neg\,(y \vee a)) \vee (x \wedge \neg\neg\,(y \vee a)) = (x \wedge \neg\, y \wedge \neg\, a) \vee (x \wedge \neg\neg\,(y \vee a)) = ((x \wedge \neg\, y) \wedge \neg\, a) \vee (x \wedge \neg\neg\,(y \vee a)) = (a \wedge \neg\, a) \vee (x \wedge \neg\neg\,(y \vee a)) = 0 \vee (x \wedge \neg\neg\,(y \vee a)) = x \wedge \neg\neg\,(y \vee a)$. よって $x \leq \neg\neg\,(y \vee a)$ で仮定から$\neg\,(y \vee a) \leq \neg\, x$. これに (4) を使うと$\neg\, y \wedge \neg\, a \leq \neg\, x$ で $\neg\neg\, x \leq \neg\neg\, x$ とで注意 1 の $\wedge$ の単調性を使って$\neg\, y \wedge \neg\, a \wedge \neg\neg\, x \leq \neg\, x \wedge \neg\neg\, x = 0$ から $(\neg\, a \wedge \neg\neg\, x) \wedge \neg\, y = 0$. これを使うと $(\neg\, a \wedge \neg\neg\, x) \wedge \neg\neg\, y = ((\neg\, a \wedge \neg\neg\, x) \wedge \neg\neg\, y) \vee 0 = ((\neg\, a \wedge \neg\neg\, x) \wedge \neg\neg\, y) \vee ((\neg\, a \wedge \neg\neg\, x) \wedge \neg\, y) = (\neg\, a \wedge \neg\neg\, x) \wedge (\neg\neg\, y \vee \neg\, y) = (\neg\, a \wedge \neg\neg\, x) \wedge 1 = \neg\, a \wedge \neg\neg\, x$. よって$\neg\, a \wedge \neg\neg\, x \leq \neg\neg\, y$. これと $\neg\, a \wedge \neg\, x \leq \neg\, x$ とで $\vee$ の単調性を使うと $(\neg\, a \wedge \neg\, x) \vee (\neg\, a \wedge \neg\neg\, x) \leq \neg\, x \vee \neg\neg\, y \cdots$③. ところで $(\neg\, a \wedge \neg\, x) \vee (\neg\, a \wedge \neg\neg\, x) = \neg\, a \wedge (\neg\, x \vee \neg\neg\, x) = \neg\, a \wedge 1 = \neg\, a = \neg\,(x \wedge \neg\, y) \cdots$④. ③, ④ より $\neg\,(x \wedge \neg\, y) \leq \neg\, x \vee \neg\neg\, y$ が成り立つ.

(6)：$\Longrightarrow$：$T5$ より $0 \leq \neg\, 1$ で仮定 $T9$ を使うと $1 \leq \neg\, 0$. また $T5^\circ$から $\neg\, 0 \leq 1$ で$\neg\, 0 = 1$ が成り立つ. 次に $x \wedge \neg\, y = 0$ とすると $x \wedge \neg\neg\, y = (x \wedge \neg\neg\, y) \vee 0 = (x \wedge \neg\neg\, y) \vee (x \wedge \neg\, y) = x \wedge (\neg\neg\, y \vee \neg\, y) = x \wedge 1 = x$ から $x \leq \neg\neg\, y$.これに仮定 $T9$ を使うと$\neg\, y \leq \neg\, x$. 逆に $\neg\, y \leq \neg\, x$ とすると $x \leq x$ とで $\wedge$ の単調性を使って $x \wedge \neg\, y \leq x \wedge \neg\, x = 0$ から $x \wedge \neg\, y = 0$ が成り立つ.

$\Longleftarrow$：$(x \wedge \neg\, y = 0 \Longleftarrow \neg\, y \leq \neg\, x)$ で y を x にすると $x \wedge \neg\, x = 0$ が成り立つ. 次に $x \leq \neg\, y$ とすると $\neg\neg\, y \leq \neg\neg\, y$ とで $\wedge$ の単調性を使うと $x \wedge \neg\neg\, y \leq \neg\, y \wedge \neg\neg\, y = 0$ から $x \wedge \neg\neg\, y = 0$. 仮定より $\neg\neg\, y \leq \neg\, x$ で $y \leq \neg\neg\, y$ から $y \leq \neg\, x$ が成り立つ. (証明終)

さらに, 次のことが成り立つ.

[注意 3] 束において, 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $[(F9$ または $F9^\circ)$ かつ $x \leq \neg\neg\, x] \Longrightarrow \neg\neg\neg\, x = \neg\, x$

(2)
$$\left\{\begin{array}{l} (F9)\ \neg\,(x \wedge \neg\, y) = \neg\, x \vee \neg\neg\, y \\ (F9^\circ)\ \neg\,(x \vee y) = \neg\, x \wedge \neg\, y \\ \neg\neg\neg\, x = \neg\, x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ①\ \neg\neg\,(x \wedge \neg\, y) = \neg\neg\, x \wedge \neg\, y = \neg\neg\,(\neg\neg\, x \wedge \neg\, y) \\ ②\ \neg\neg\,(x \vee \neg\, y) = \neg\neg\, x \vee \neg\, y = \neg\neg\,(\neg\neg\, x \vee \neg\, y) \\ ③\ \neg\neg\,(x \vee y) = \neg\neg\, x \vee \neg\neg\, y \\ ④\ \neg\,(\neg\, x \vee \neg\, y) = \neg\neg\, x \wedge \neg\neg\, y \end{array}\right.$$

（証明）

(1)：$x \leq \neg\neg x$ で x を $\neg x$ にすると $\neg x \leq \neg\neg\neg x$. 次に 定義3から $x \wedge \neg\neg x = x$. この両辺に否定をとると $\neg(x \wedge \neg\neg x) = \neg x$ で仮定 $F9$ より $\neg x \vee \neg\neg\neg x = \neg x$ から $\neg\neg\neg x \leq \neg x$. また仮定より $x \vee \neg\neg x = \neg\neg x$. この両辺に否定をとり, 仮定 $F9^\circ$ を使うと $\neg x \wedge \neg\neg\neg x = \neg\neg\neg x$ から $\neg\neg\neg x \leq x$. よって $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ.

(2)：$\Longrightarrow$：$\neg\neg(x \wedge \neg y) = \neg(\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg\neg x \wedge \neg y$. また $\neg\neg(\neg\neg x \wedge \neg y) = \neg(\neg\neg\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg\neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg\neg x \wedge \neg y$. よって ① が成り立つ. ② は ① と双対にできる. 次に $\neg\neg(x \vee y) = \neg(\neg x \wedge \neg y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y$ より ③ が成り立つ. ④ は仮定 $F9^\circ$ より明らかである.

$\Longleftarrow$：仮定 ① で x を $\neg x$ に, y を x にすると $\neg\neg\neg x = \neg\neg(\neg x \wedge \neg x) = \neg\neg\neg x \wedge \neg x$ から $\neg\neg\neg x \leq \neg x$. また 仮定 ② でも x を $\neg x$ に, y を x にすると $\neg\neg\neg x = \neg\neg(\neg x \vee \neg x) = \neg\neg\neg x \vee \neg x$ から $\neg x \leq \neg\neg\neg x$. よって $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ. これを使うと $\neg(x \vee y) = \neg\neg\neg(x \vee y) \stackrel{③}{=} \neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y) \stackrel{④}{=} \neg\neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg x \wedge \neg y$. 次に $\neg(x \wedge \neg y) = \neg\neg\neg(x \wedge \neg y) \stackrel{①}{=} \neg(\neg\neg x \wedge \neg y) = \neg(\neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y) \stackrel{④}{=} \neg\neg(\neg x \vee \neg\neg y) \stackrel{③}{=} \neg\neg\neg x \vee \neg\neg\neg\neg y = \neg x \vee \neg\neg y$. （証明終）

[注意4] BDL において, 次の (1)〜(5) が成り立つ.

(1) $x \leq \neg\neg x \Longrightarrow \neg\neg 1 = 1$

(1°) $(\neg 0 = 1$ かつ $x \wedge \neg x \leq 0) \Longrightarrow \neg\neg 0 = 0$

(2) $\neg 1 = 0 \Longleftrightarrow \neg 1 \leq x$

(2°) $\neg 0 = 1 \Longleftrightarrow x \leq \neg 0$

(3) $x \wedge \neg x \leq 0 \Longrightarrow \neg 1 = 0$

(3°) $(x \leq \neg y \Longrightarrow y \leq \neg x) \Longrightarrow \neg 0 = 1$

(4) $\neg 1 = 0$ が成り立つとき　　$\neg 0 = \Longleftrightarrow \neg\neg 1 = 1$

(4°) $\neg 0 = 1$ が成り立つと　　$\neg 1 = 0 \Longleftrightarrow \neg\neg 0 = 0$

(5) ($F9$ かつ $\neg 0 = 1$ かつ $\neg 1 = 0$ かつ $x \leq \neg\neg x$) が成り立つとき

$$① \ x \wedge \neg x = 0 \Longleftrightarrow ② \ \neg x \vee \neg\neg x = 1 \Longleftrightarrow ③ \ \neg x \wedge \neg\neg x = 0$$

（証明）

(1)：仮定から $1 \leq \neg\neg 1$. $T5^\circ$ から $\neg\neg 1 \leq 1$ で成り立つ.

(1°)：$\neg\neg 0 = \neg(\neg 0) = \neg 1 = 1 \wedge \neg 1 \leq 0$ と $T5$ から $0 \leq \neg\neg 0$ で成り立つ.

(2)：$\Longrightarrow$：仮定と $T5$ から $\neg 1 = 0 \leq x$. $\Longleftarrow$：仮定から $\neg 1 \leq 0$. $T5$ より $0 \leq \neg 1$ で成り立つ.

(2°)：$\Longrightarrow$：仮定と $T5^\circ$ から $x \leq 1 = \neg 0$. $\Longleftarrow$：仮定から $1 \leq \neg 0$. $T5^\circ$ より $\neg 0 \leq 1$ で成り立つ.

(3)：$T5$ から $0 \leq \neg 1$. 仮定より $\neg 1 = 1 \wedge \neg 1 \leq 0$ で成り立つ.

(3°)：$T5^\circ$ から $\neg 0 \leq 1$. $T5$ より $0 \leq \neg 1$ で仮定を使って $1 \leq \neg 0$ から成り立つ.

(4)：$\Longrightarrow$：$\neg\neg 1 = \neg(\neg 1) = \neg 0 = 1$.　$\Longleftarrow$：$\neg 0 = \neg(\neg 1) = \neg\neg 1 = 1$.

(4°)：$\Longrightarrow$：$\neg\neg 0 = \neg(\neg 0) = \neg 1 = 0$.　$\Longleftarrow$：$\neg 1 = \neg(\neg 0) = \neg\neg 0 = 0$.

(5)：① $\Longrightarrow$ ② 仮定から $\neg(x \wedge \neg x) = \neg 0$ で $\neg x \vee \neg\neg x = 1$ が成り立つ.　② $\Longrightarrow$ ③：$\neg x \wedge \neg\neg x \leq \neg\neg(\neg x \wedge \neg\neg x) = \neg(\neg\neg x \vee \neg\neg\neg x) = \neg 1 = 0$. また $T5$ から $0 \leq \neg x \wedge \neg\neg x$ で $\neg x \wedge \neg\neg x = 0$ が成り立つ.　③ $\Longrightarrow$ ①：$x \leq \neg\neg x$ と $\neg x \leq \neg x$ とで $\wedge$ の単調性を使って $x \wedge \neg x \leq \neg\neg x \wedge \neg x = 0$. また $T5$ から $0 \leq x \wedge \neg x$ で $x \wedge \neg x = 0$ が成り立つ. （証明終）

QSA について, 次の同値性が成り立つ.

[注意5] $\mathbf{A}$ を BDL とする. $\mathbf{A}$ が QSA であることと, 次の (1)〜 (4) は互いに同値である.

(1) $\begin{cases} (F9)\ \neg(x \wedge \neg y) = \neg x \vee \neg\neg y \\ (F10)\ \neg 0 = 1 \\ (F11)\ x \wedge \neg x = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (F9)\ \neg(x \wedge \neg y) = \neg x \vee \neg\neg y \\ (F10^\circ)\ \neg 1 = 0 \\ (F11)\ x \wedge \neg x = 0 \\ (T10)\ x \leq \neg\neg x \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (T9)\ x \leq \neg y \Longrightarrow y \leq \neg x \\ (F11)\ x \wedge \neg x = 0 \\ \neg x \vee \neg\neg x = 1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} (F9^{\circ})\ \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\ (F11)\ x \wedge \neg x = 0 \\ x \wedge \neg y = 0 \Longleftrightarrow \neg y \leq \neg x \\ \neg x \vee \neg\neg x = 1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} (F9)\ \neg(x \wedge \neg y) = \neg x \vee \neg\neg y \\ (F10)\ \neg 0 = 1 \\ x \wedge \neg y = 0 \Longleftrightarrow \neg y \leq x \end{cases}$

(証明)

A が QSA である $\Longrightarrow$ (1) は明らかである. **A** が QSA である $\Longleftarrow$ (1) について. $(F8)$：$x \wedge \neg\neg x = 0 \vee (x \wedge \neg\neg x) = (x \wedge \neg x) \vee (x \wedge \neg\neg x) = x \wedge (\neg x \vee \neg\neg x) = x \wedge \neg(x \wedge \neg x) = x \wedge \neg 0 = x \wedge 1 = x$. $(F8^{\circ})$：$x \vee \neg\neg x = 1 \wedge (x \vee \neg\neg x) = \neg 0 \wedge (x \vee \neg\neg x) = \neg(x \wedge \neg x) \wedge (x \vee \neg\neg x) = (\neg x \vee \neg\neg x) \wedge (x \vee \neg\neg x) = \neg\neg x \vee (x \wedge \neg x) = \neg\neg x \vee 0 = \neg\neg x$. また $x \leq \neg\neg x$ かつ $\neg(x \wedge \neg y) \geq \neg x \vee \neg\neg y$ が成り立つから 注意 2 の(3)から $T9$ が成り立つので注意 2 の(4)より $F9^{\circ}$ が成り立つ. 次に $0 = 1 \wedge \neg 1 = \neg 1$ から $F10^{\circ}$ が成り立つ.

(1) $\Longrightarrow$ (2)：上の証明と同様にして $F10^{\circ}$ と $T10$ が成り立つ.

(2) $\Longrightarrow$ (3)：注意 2 の(3)から $T9$ が成り立つ. 注意 4 の(1)から $1 = \neg\neg 1 = \neg(\neg 1) = \neg 0 = \neg(x \wedge \neg x) = \neg x \vee \neg\neg x$.

(3) $\Longrightarrow$ (4)：注意 2 の(4)から $F9^{\circ}$ が成り立つ. また 注意 2 の(6)から $x \wedge \neg y = 0 \Longleftrightarrow \neg y \leq \neg x$ が成り立つ.

(4) $\Longrightarrow$ (5)：$(x \wedge \neg y) \wedge \neg x = \neg y \wedge (x \wedge \neg x) = \neg y \wedge 0 = 0$ で仮定を使って $\neg x \leq \neg(x \wedge \neg y) \cdots$ ①. $(x \wedge \neg y) \wedge \neg\neg y = x \wedge (\neg y \wedge \neg\neg y) = x \wedge 0 = 0$ で仮定を使って $\neg\neg y \leq \neg(x \wedge \neg y) \cdots$ ②. ①, ②で $T7^{\circ}$ を使うと $\neg x \vee \neg\neg y \leq \neg(x \wedge \neg y) \cdots$ ③. 次に $a = x \wedge \neg y$ とおく. $x \wedge \neg(y \vee a) = x \wedge (\neg y \wedge \neg a) = (x \wedge \neg y) \wedge \neg a = a \wedge \neg a = 0$. 仮定を使って $\neg(y \vee a) \leq \neg x$. これと $\neg\neg x \leq \neg\neg x$ とで $\wedge$ の単調性を使って $\neg(y \vee a) \wedge \neg\neg x \leq \neg x \wedge \neg\neg x = 0$. よって $\neg(y \vee a) \wedge \neg\neg x = 0$. これより $\neg y \wedge \neg(a \vee \neg x) = \neg y \wedge \neg a \wedge \neg\neg x = \neg(y \vee a) \wedge \neg\neg x = 0$. 仮定を使って $\neg(a \vee \neg x) \leq \neg\neg y$ から $\neg a \wedge \neg\neg x \leq \neg\neg y$. これと $\neg a \wedge \neg x \leq \neg x$ とで $\vee$ の単調性を使って $(\neg a \wedge \neg x) \vee (\neg a \wedge \neg\neg x) \leq \neg x \vee \neg\neg y$. ここで $(\neg a \wedge \neg x) \vee (\neg a \wedge \neg\neg x) = \neg a \wedge (\neg x \vee \neg\neg x) = \neg a \wedge 1 = \neg a = \neg(x \wedge \neg y)$. よって $\neg(x \wedge \neg y) \leq \neg x \vee \neg\neg y \cdots$ ④. ③, ④ で $T2$ を使うと $\neg(x \wedge \neg y) = \neg x \vee \neg\neg y$ が成り立つ. また $\neg 0 = \neg(x \wedge \neg x) = \neg x \vee \neg\neg x = 1$ から $F10$ が成り立つ.

(5) $\Longrightarrow$ (1)：仮定 $x \wedge \neg y = 0 \Longleftarrow \neg y \leq \neg x$ で y を x にすれば $x \wedge \neg x = 0$ が成り立つ. (証明終)

§3 QSA のシーケントによる形式的体系 GQSA

[3], [6]と同様にシーケントの定義をする.

[定義 4] (シーケント(式)の定義)

ワードの有限列をギリシア大文字 Γ, Δ などで表す. ワードの有限列 $a_1, \ldots, a_m$ を Γ とし, $b_1, \ldots, b_n$ を Δ とするとき, QSA での不等式 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ をシーケント(式) $\Gamma \longrightarrow \Delta$ で表す. ただし, Γ が空のとき ($\Gamma = \emptyset$ と書く), $1 \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ とし, $\Delta = \emptyset$ のときは $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq 0$ とする. $\Gamma = \Delta = \emptyset$ の場合は考えない.

このとき, 準ストーン代数(QSA)のシーケントによる形式的体系 GQSA を[3], [6]と同様に次のように定義する.

[定義 5] (GQSA の定義)

[1] 始式

$(B1)\quad a \longrightarrow a \qquad (B2)\quad 0 \longrightarrow \Delta \qquad (B3)\quad \Gamma \longrightarrow 1$

[2] 推論規則

(1) 構造に関する推論規則：

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (w \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a}\ (\longrightarrow w)$$

$$\dfrac{a,\ a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (c \longrightarrow) \qquad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a,\ a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a}\ (\longrightarrow c)$$

$$\dfrac{\Gamma_1,\ a,\ b,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1,\ b,\ a,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\ (e \longrightarrow) \qquad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\ a,\ b,\ \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\ b,\ a,\ \Delta_2}\ (\longrightarrow e)$$

$$\dfrac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1,\ a \qquad a,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1,\ \Delta_2}\ (cut)$$

(2) 論理記号に関する推論規則：

$$\dfrac{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge_1 \longrightarrow) \qquad \dfrac{b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge_2 \longrightarrow)$$

$$\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \vee b}\ (\longrightarrow \vee_1) \qquad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \vee b}\ (\longrightarrow \vee_2)$$

$$\dfrac{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta \quad b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \vee b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\vee \longrightarrow) \qquad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \quad \Gamma \longrightarrow \Delta\ b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \wedge b}\ (\longrightarrow \wedge)$$

$$\dfrac{\Gamma \longrightarrow \neg\, \Delta}{\Delta \longrightarrow \neg\, \Gamma}\ (\longrightarrow \neg) \qquad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}{\neg\, a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\neg \longrightarrow)$$

ただし，Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $\neg\,\Gamma$ は $\neg\, a_m, \ldots, \neg\, a_1$ を表し，$\Gamma = \emptyset$ のときは $\neg\,\Gamma = \emptyset$ とする.

［注意６］　次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg\neg\, a}\ (\longrightarrow \neg\neg)$　　(2) $\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\neg\,\Delta \longrightarrow \neg\,\Gamma}\ (\neg \longrightarrow \neg)$

（証明）

(1)：

$$\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \qquad \dfrac{\neg\, a \longrightarrow \neg\, a}{a \longrightarrow \neg\neg, a}\ (\longrightarrow \neg)}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ \neg\neg\, a}$$

(2)：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a_1, \ldots, a_m \longrightarrow b_1, \ldots, b_n}{a_1, \ldots, a_m \longrightarrow b_1 \vee \cdots \vee b_n} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{b_1 \longrightarrow b_1}{b_1 \longrightarrow b_1, b_2} \qquad \dfrac{b_2 \longrightarrow b_2}{b_2 \longrightarrow b_1, b_2}}{b_1 \vee b_2 \longrightarrow b_1, b_2}}{\vdots}}{b_1 \vee \cdots \vee b_n \longrightarrow \neg\neg\, b_1, \ldots, \neg\neg\, b_n}}{a_1, \ldots, a_m \longrightarrow \neg\neg\, b_1, \ldots, \neg\neg\, b_n}}{\neg\, b_n, \ldots, \neg\, b_1 \longrightarrow \neg\, a_m, \ldots, \neg\, a_1}\ (\longrightarrow \neg)$$

（証明終）

[3], [6]と同様に次の定義をする.

［定義６］（$\vdash$ の定義）

シーケント $\Gamma \longrightarrow \Delta$ が GQSA で証明可能であるとき，$\vdash \Gamma \longrightarrow \Delta$ と書く.

[3]の注意４と注意６と同様に次の同値性が成り立つ.

［注意７］

(1)　$(\longrightarrow \neg\neg) \Longleftrightarrow\ \vdash a \longrightarrow \neg\neg\, a$

(2)　$(\neg \longrightarrow) \Longleftrightarrow\ \vdash a, \neg\, a \longrightarrow$

§４　QSA と GQSA の演繹的同値性

[3]と同様に次の定義をする.

［定義７］（$\models$ の定義）

不等式 $a \leq b$ が QSA で成り立つとき　$\models a \leq b$ と書く.

[定義 8] (QSA での等号の定義)
a, b をワードとする. $\vdash a \longrightarrow b$ かつ $\vdash b \longrightarrow a$ のとき $a \equiv b$ とすれば, $\equiv$は 同値関係である. そこで $A/_{\equiv}$ (A の $\equiv$による商集合)をあらためて A とし, $\equiv$を$=$とみなしたものを QSA での等号とする. (つまり, リンデンバウム代数(Lindenbaum algebra)を考える.)

このとき, [3] , [6] と同様にして, 次のことが成り立つ.

[定理 2] a, b をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\models a \leq b \qquad \text{ならば} \qquad \vdash a \longrightarrow b$$

(証明)

QSA のすべての公理($F1 \sim F11$)が GQSA で証明可能であることを示せばよいが, これらと同値な $T1 \sim T13$ が GQSA で証明可能であることを示す.

$T1 \sim T8^{\circ}$ は[3]の定理 2 の証明と同じである.

$T9$:
$$\begin{array}{c} x \longrightarrow \neg\, y \\ \hline y \longrightarrow \neg\, x \end{array} \quad (\longrightarrow \neg)$$

$T10$: 注意 6 の(1)と注意 7 の(1)から成り立つ.

$T11$:
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} x \longrightarrow x \\ \hline \neg\, y, x \longrightarrow x \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \neg\, y \longrightarrow \neg\, y \\ \hline\hline \neg\, y, x \longrightarrow \neg\, y \end{array} \\ \hline
\neg\, y, x \longrightarrow x \wedge \neg\, y \\ \hline\hline
\neg\, y, x \longrightarrow \neg\neg\, (x \wedge \neg\, y) \\ \hline\hline
\neg\, (x \wedge \neg\, y) \longrightarrow \neg\, x, \neg\neg\, y \\ \hline\hline
\neg\, (x \wedge \neg\, y) \longrightarrow \neg\, x \vee \neg\neg\, y
\end{array} \quad (\longrightarrow \neg)$$

$T11^{\circ}$:
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} x \longrightarrow x \\ \hline\hline x \longrightarrow y, x \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} y \longrightarrow y \\ \hline y \longrightarrow y, x \end{array} \\ \hline
x \vee y \longrightarrow y, x \\ \hline\hline
x \vee y \longrightarrow \neg\neg\, y, \neg\neg\, x \\ \hline
\neg\, x, \neg\, y \longrightarrow \neg\, (x \vee y) \\ \hline\hline
\neg\, x \wedge \neg\, y \longrightarrow \neg\, (x \vee y)
\end{array} \quad (\longrightarrow \neg)$$

$T12$:
$$\begin{array}{c}
\longrightarrow 1 \\ \hline
\neg\, 1 \longrightarrow \\ \hline
\neg\, 1 \longrightarrow x
\end{array} \quad (\neg \longrightarrow)$$

$T13$:
$$\begin{array}{c}
x \longrightarrow x \\ \hline
\neg\, x, x \longrightarrow \\ \hline
x, \neg\, x \longrightarrow \\ \hline\hline
x \wedge \neg\, x \longrightarrow \\ \hline
x \wedge \neg\, x \longrightarrow 0
\end{array} \quad (\neg \longrightarrow)$$

(証明終)

[定理 3] $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\vdash a_1 \ldots, a_m \longrightarrow b_1, \ldots, b_n \qquad \text{ならば} \qquad \models a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$$

(証明)

Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ を x で表す. Δ が $b_1, \ldots, b_n$ のとき $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を y で表す. GQSA の始式 $(B1)$, $(B2)$, $(B3)$ はそれぞれ $T1$, $T5$, $T5^{\circ}$ から QSA で成り立つ. 次に GQSA の各推論規則の上式(上のシーケント)に対応する不等式が QSA で成り立つと仮定するとき, 下式に対応する不等式が QSA で成り立つことを示せばよい.

$(w \longrightarrow) \sim (\longrightarrow \wedge)$ は[3]の定理 3 の証明と同じである.

$(\longrightarrow \neg)$: $\models x \leq \neg\, y$ とすると $T9$ から $\models y \leq \neg\, x$ が成り立つ.

$(\neg \longrightarrow)$: $\models x \leq y \vee a$ とする. $\neg\, a \leq \neg\, a$ とで $\wedge$ の単調性を使うと $\neg\, a \wedge x \leq \neg\, a \wedge (y \vee a)$. ところで $\neg\, a \wedge (y \vee a) = (\neg\, a \wedge x) \vee (a \wedge \neg\, a) = (\neg\, a \wedge x) \vee 0 = \neg\, a \wedge x \leq y$ から $\models \neg\, a \wedge x \leq y$ が成り立つ. (証明終)

以上により QSA と GQSA が演繹的に同値であることがわかる．

参考文献

[1] 荒金憲一, MS-algebra に双対な代数系について, 奈良高専研究紀要 28(1993), 105–111.

[2] 荒金憲一, ファジイ代数に関連する代数系について, 奈良高専研究紀要 31(1996), 81–89.

[3] 荒金憲一, MS 代数とストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 33(1998), 119–127.

[4] 荒金憲一・竹村 康, 擬ファジイ代数の完全性について, 大阪産業大学論集 自然科学編 90(1992), 5–6.

[5] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift 39(1935), 176–216, 405–431.

[6] 竹村 康, 弱ファジー集合算のシーケントによる形式化, 大阪産業大学論集 自然科学編 88(1991), 39–42.

[7] N.H. Sankappanavar and H.P. Sankappanavar, *Quasi-Stone algebras*, Mathematical Logic Quarterly 39(1993), 255–268.