半ド・モルガン代数のシーケントによる形式化

荒金　憲一

Sequential formulations for semi-De Morgan algebras

Kenichi ARAGANE

最小元 0 と最大元 1 をもつ分配束 (bounded distributive lattice (BDL) : $F1 \sim F7^\circ$ を満たす) で 3 重否定律 ($F8$, $F8^\circ$ つまり $\neg\neg\neg x = \neg x$) と半ド・モルガン律 ($F9$, $F9^\circ$) と 0, 1 についての性質 ($F10$, $F10^\circ$) を満たす代数系が [6] で定義されている半ド・モルガン代数 (semi-De Morgan algebra (SDMA) : [2] の $\mathbb{MP}\tilde{\mathbb{P}}$ と $\mathbb{MP}$ の間にある)である．本論文では, 半ド・モルガン代数で成り立つ性質を調べる。そして半ド・モルガン代数と演繹的に同値な, G. Gentzen の方法 ([5]) でのシーケント(式)による形式的体系 GSDMA を考える．

§1　ワード

[3], [4] と同様にワードを定義する．

[定義 1] （ワードの定義）

(1) 定数 0, 1 はワードである．

(2) 変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ はワードである．

(3) x と y がワードのとき $x \wedge y$, $x \vee y$, $\neg x$ はワードである．

(4) 以上の (1), (2), (3) によって構成された記号列のみがワードである．

ワード全体の集合を A とし, 2 項演算 $\vee$, $\wedge$ と 1 項演算 $\neg$ をもつ代数系 $\mathbf{A} = (A\,;0, 1, \vee, \wedge, \neg)$ を考える．

§2　半ド・モルガン代数（SDMA）

[定義 2] （SDMA の定義）

A の任意の元 x, y, z に対して, 次の $F1 \sim F10^\circ$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{A}$ を半ド・モルガン代数(SDMA)とよぶ ([6])．

$F1$	$x \wedge 0 = 0$	$F1^\circ$	$x \vee 1 = 1$
$F2$	$x \wedge 1 = x$	$F2^\circ$	$x \vee 0 = x$
$F3$	$x \wedge x = x$	$F3^\circ$	$x \vee x = x$
$F4$	$x \wedge y = y \wedge x$	$F4^\circ$	$x \vee y = y \vee x$
$F5$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$F5^\circ$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$F6$	$x \wedge (x \vee y) = x$	$F6^\circ$	$x \vee (x \wedge y) = x$
$F7$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$F7^\circ$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$F8$	$\neg x \wedge \neg\neg\neg x = \neg x$	$F8^\circ$	$\neg x \vee \neg\neg\neg x = \neg x$
$F9$	$\neg\neg (x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$	$F9^\circ$	$\neg (x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
$F10$	$\neg 0 = 1$	$F10^\circ$	$\neg 1 = 0$

［定義３］（不等式の定義）
x, y を A の任意の元とする．$x \wedge y = x$ が成り立つとき，$x \leq y$ と書く．

[1], [3], [4] と同様にして，次の定理が成り立つ．

［定理１］ 代数系 $\mathbf{A}$ が 半ド・モルガン代数(SDMA)であり(つまり $F1 \sim F10^{\circ}$ が成り立つ)，かつ定義3により $x \leq y$ が定義される $\Longleftrightarrow$ A の任意の元 x, y, z に対して $\mathbf{A}$ で次の $T1 \sim T12^{\circ}$ が成り立つ．

$T1$　$x \leq x$

$T2$　$x \leq y, y \leq x \Longleftrightarrow x = y$

$T3$　$x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$

$T4$　$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$

$T5$　$0 \leq x$　　　$T5^{\circ}$　$x \leq 1$

$T6$　$x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y$　　　$T6^{\circ}$　$x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y$

$T7$　$z \leq x, z \leq y \Longrightarrow z \leq x \wedge y$　　　$T7^{\circ}$　$x \leq z, y \leq z \Longrightarrow x \vee y \leq z$

$T8$　$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$　　　$T8^{\circ}$　$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$

$T9$　$x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x$　　　$T9^{\circ}$　$\neg\neg x \leq \neg\neg y \Longleftrightarrow \neg y \leq \neg x$

$T10$　$\neg x \leq \neg\neg\neg x$　　　$T10^{\circ}$　$\neg\neg\neg x \leq \neg x$

$T11$　$\neg\neg x \wedge \neg\neg y \leq \neg\neg(x \wedge y)$　　　$T11^{\circ}$　$\neg x \wedge \neg y \leq \neg(x \vee y)$

$T12$　$\neg 1 \leq x$　　　$T12^{\circ}$　$x \leq \neg 0$

（証明）

$\Longrightarrow$：

$T1 \sim T8^{\circ}$ と $T9$ と $T11^{\circ}$ と $T12$ は [3] の定理1の証明と同じである．

$T9^{\circ}$：$\Longrightarrow$：$\neg\neg x \leq \neg\neg y$ とすると $T4$ より $\neg\neg x \vee \neg\neg y = \neg\neg y$．この両辺に否定をとると $F9^{\circ}$ から $\neg\neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg\neg\neg y$．ここで $F8$, $F8^{\circ}$ と定義3, $T4$, $T2$ より $\neg\neg\neg x = \neg x$ であるから $\neg x \wedge \neg y = \neg y$．よって $F4$ と定義3から $\neg y \leq \neg x$ が成り立つ．$\Longleftarrow$：$T9$ から成り立つ．

$T10$：$F8$ と定義3から成り立つ．

$T10^{\circ}$：$F8^{\circ}$ と $F4^{\circ}$, $T4$ から成り立つ．

$T11$：$F9$ と $T2$ から成り立つ．

$T12^{\circ}$：$F10$ と $F2$ より $x \wedge \neg 0 = x \wedge 1 = x$ で定義3から $x \leq \neg 0$ が成り立つ．

$\Longleftarrow$：

定義3により $x \leq y$ が定義されることと $F1 \sim F7^{\circ}$ と $F10^{\circ}$ は [3] の定理1の証明と同じである．

$F8$：$T10$ と定義3から成り立つ．

$F8^{\circ}$：$T10^{\circ}$ と $T4$, $F4^{\circ}$ から成り立つ．

$F9$：$T6$ で $T9$ を2回使うと $\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x$, $\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg y$．これらに $T7$ を使うと $\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x \wedge \neg\neg y$．これと $T11$ に $T2$ を使って $\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$ が成り立つ．

$F9^{\circ}$：$T6^{\circ}$ で $T9$ を使うと $\neg(x \vee y) \leq \neg x$, $\neg(x \vee y) \leq \neg y$．これらに $T7$ を使うと $\neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y$．これと $T11^{\circ}$ に $T2$ を使って $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ が成り立つ．

$F10$：$T5^{\circ}$ より $\neg 0 \leq 1$．また $T12^{\circ}$ から $1 \leq \neg 0$ で $T2$ を使うと $\neg 0 = 1$ が成り立つ．（証明終）

次の⑵は [3] の注意2と同様に成り立つ．

［注意１］ 束($T1 \sim T4$ と $T6 \sim T7^{\circ}$ が成り立つ)において，次の⑴, ⑵, ⑶ が成り立つ．

⑴ [$T10$ ($\neg x \leq \neg\neg\neg x$) かつ ($x \leq \neg y \Longrightarrow \neg\neg y \wedge \neg x$)] $\Longleftrightarrow$ ($x \leq \neg\neg y \Longrightarrow \neg y \wedge \neg x$)

⑵ $\neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y \Longleftrightarrow T9$ ($x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x$)

⑶ $\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x \wedge \neg\neg y \Longleftrightarrow$ ($x \leq y \Longrightarrow \neg\neg x \leq \neg\neg y$)

（証明）

⑴：$\Longrightarrow$ $x \leq \neg\neg y$ とすると仮定から $\neg\neg\neg y \leq \neg x$ であり，$\neg y \leq \neg\neg\neg y$ より $T3$ から $\neg y \leq \neg x$ が成り立つ．$\Longleftarrow$：$T1$ より $\neg\neg x \leq \neg\neg x$ で仮定から $\neg x \leq \neg\neg\neg x$ が成り立つ．次に $x \leq \neg y$ とする．

$x \le \neg y \le \neg\neg\neg y$ より仮定から$\neg\neg y \le \neg x$が成り立つ．

⑵：$\Longrightarrow$：$x \le y$ とすると $T4$ から $x \vee y = y$．これを仮定の不等式の左辺に代入すると$\neg y \le \neg x \wedge \neg y$．また $T6$ より$\neg x \wedge \neg y \le \neg x$で $T3$ から$\neg y \le \neg x$ が成り立つ．$\Longleftarrow$：$T6^\circ$の $x \le x \vee y$, $y \le x \vee y$ で仮定を使うと $\neg (x \vee y) \le \neg x$, $\neg (x \vee y) \le \neg y$．$T7$ を使って $\neg (x \vee y) \le \neg x \wedge \neg y$ が成り立つ．

⑶：$\Longrightarrow$：$x \le y$ とすると定義 3 から $x \wedge y = x$ で $\neg\neg (x \wedge y) = \neg\neg x$．これを仮定$\neg\neg (x \wedge y) \le \neg\neg x \wedge \neg\neg y$ に代入して$\neg\neg x \le \neg\neg x \wedge \neg\neg y$．$T6$より $\neg\neg x \wedge \neg\neg y \le \neg\neg x$で $T2$ から$\neg\neg x \wedge \neg\neg y = \neg\neg x$．よって定義 3 から$\neg\neg x \le \neg\neg y$が成り立つ．$\Longleftarrow$：$T6$より $x \wedge y \le x$, $x \wedge y \le y$ で仮定を使うと $\neg\neg (x \wedge y) \le \neg\neg x$, $\neg\neg (x \wedge y) \le \neg\neg y$．これらに $T7$ を使って$\neg\neg (x \wedge y) \le \neg\neg x \wedge \neg\neg y$ が成り立つ． （証明終）

さらに, 次のことが成り立つ．

［注意 2］ 束において, 次の ⑴, ⑵, ⑶ が成り立つ．

⑴ $[T9\ (x \le y \Longrightarrow \neg y \le \neg x)$ かつ $\neg\neg\neg x = \neg x\ ] \Longrightarrow [T9^\circ(\neg\neg x \le \neg\neg y \Longleftrightarrow \neg y \le \neg x)]$

⑵ $[T9^\circ$ かつ $T10(\neg x \le \neg\neg\neg x)] \Longrightarrow \neg\neg\neg x = \neg x$

⑶ $$\begin{cases} (F9)\ \neg\neg (x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y \\ (F9^\circ)\ \neg (x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\ \neg\neg\neg x = \neg x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ①\ \neg (x \wedge y) = \neg (\neg\neg x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg (\neg x \vee \neg y) \\ ②\ \neg\neg\neg (x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\ ③\ \neg (\neg x \vee \neg y) = \neg\neg (x \wedge y) \end{cases}$$

（証明）

⑴：$\Longrightarrow$：$\neg\neg x \le \neg\neg y$ とすると $T9$ より $\neg\neg\neg y \le \neg\neg\neg x$ で仮定から $\neg y \le \neg x$ が成り立つ．$\Longleftarrow$：$T9$ より明らかである．

⑵：$T10$ より$\neg\neg x \le \neg\neg\neg\neg x$ で $T9^\circ$から $\neg\neg\neg x \le \neg x$．これと仮定 $T10$ に $T2$ を使って $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ．

⑶：$\Longrightarrow$：$\neg (x \wedge y) = \neg\neg\neg (x \wedge y) = \neg (\neg\neg x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg (\neg x \vee \neg y)$ より①が成り立つ．

次に $\neg\neg\neg (x \vee y) = \neg\neg (\neg x \wedge \neg y) = \neg\neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg x \wedge \neg y$ より②が成り立つ．

また $\neg (\neg x \vee \neg y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y = \neg\neg (x \wedge y)$ より③が成り立つ．

$\Longleftarrow$：仮定 ① で y を x にすると $F3, F3^\circ$ から $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ．次に $\neg (x \vee y) = \neg\neg\neg (x \vee y) \overset{②}{=} \neg x \wedge \neg y$．また $\neg\neg (x \wedge y) \overset{③}{=} \neg (\neg x \vee \neg y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$． （証明終）

[4] の注意 4 と同様に次のことが成り立つ．

［注意 3］ BDL において, 次の ⑴ ～ ⑷ が成り立つ．

⑴ $\neg 1 = 0 \Longleftrightarrow \neg 1 \le x$

⑵ $\neg 0 = 1 \Longleftrightarrow x \le \neg 0$

⑶ $\neg 1 = 0$ が成り立つとき　$\neg 0 = 1 \Longleftrightarrow \neg\neg 1 = 1$

⑷ $\neg 0 = 1$ が成り立つとき　$\neg 1 = 0 \Longleftrightarrow \neg\neg 0 = 0$

（証明）

[4] の注意 4 の (2), (2 °), (4), (4 °)とそれぞれ同じである．

§3 SDMA のシーケントによる形式的体系 GSDMA

[3], [4]と同様にシーケントの定義をする．

［定義 4］（シーケント(式)の定義）

ワードの有限列をギリシア大文字Γ, Δなどで表す．ワードの有限列 $a_1, \ldots, a_m$ をΓとし, $b_1, \ldots, b_n$ をΔとするとき, SDMA での不等式 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \le b_1 \vee \cdots \vee b_n$ をシーケント(式) $\Gamma \longrightarrow \Delta$で表す．ただし, Γが空のとき ($\Gamma = \emptyset$と書く), $1 \le b_1 \vee \cdots \vee b_n$ とし, $\Delta = \emptyset$ のときは $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \le 0$ とする．$\Gamma = \Delta = \emptyset$ の場合は考えない．

このとき, 半ド・モルガン代数(SDMA)のシーケントによる形式的体系 GSDMA を [3], [4] と同様に次のように定義する．

［定義5］（GSDMAの定義）

［1］ 始式

$(B1)\ a \longrightarrow a \quad (B2)\ 0 \longrightarrow \Delta \quad (B3)\ \Gamma \longrightarrow 1 \quad (B4)\ \neg a \longrightarrow \neg\neg\neg a \quad (B5)\ \neg\neg\neg a \longrightarrow \neg a$

［2］ 推論規則

⑴ 構造に関する推論規則：

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (w \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a}\ (\longrightarrow w)$$

$$\frac{a,\ a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (c \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a,\ a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a}\ (\longrightarrow c)$$

$$\frac{\Gamma_1,\ a,\ b,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1,\ b,\ a,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\ (e \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\ a,\ b,\ \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\ b,\ a,\ \Delta_2}\ (\longrightarrow e)$$

$$\frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1,\ a \qquad a,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1,\ \Delta_2}\ (cut)$$

⑵ 論理記号に関する推論規則：

$$\frac{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge_1 \longrightarrow) \qquad \frac{b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge_2 \longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \vee b}\ (\longrightarrow \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \vee b}\ (\longrightarrow \vee_2)$$

$$\frac{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta \quad b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \vee b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\vee \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \quad \Gamma \longrightarrow \Delta,\ b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ a \wedge b}\ (\longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\neg \Delta \longrightarrow \neg \Gamma}\ (\neg \longrightarrow \neg)$$

ただし，Γが$a_1, \ldots, a_m$のとき$\neg\Gamma$は$\neg a_m, \ldots, \neg a_1$を表し，$\Gamma = \emptyset$のときは$\neg\Gamma = \emptyset$とする．

［注意4］ 次の2つの同値性が成り立つ．

$$(B4) \Longleftrightarrow \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg a}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg\neg\neg a}\ (\longrightarrow \neg\neg) \qquad (B5) \Longleftrightarrow \frac{\neg a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{\neg\neg\neg a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\neg\neg \longrightarrow)$$

（証明）

$(B4) \Longrightarrow (\longrightarrow \neg\neg)$： $\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ \neg a \qquad \neg a \longrightarrow \neg\neg\neg a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\ \neg\neg\neg a}\ (cut)$

$(\longrightarrow \neg\neg) \Longrightarrow (B4)$： $\dfrac{\neg a \longrightarrow \neg a}{\neg a \longrightarrow \neg\neg\neg a}\ (\longrightarrow \neg\neg)$

$(B5) \Longleftrightarrow (\neg\neg \longrightarrow)$：上と双対である．　（証明終）

§4　SDMAとGSDMAの演繹的同値性

［3］,［4］と同様に次の定義をする．

［定義6］（$\vdash$の定義）

シーケント$\Gamma \longrightarrow \Delta$がGSDMAで証明可能であるとき，$\vdash\ \Gamma \longrightarrow \Delta$と書く．

［定義7］（$\models$の定義）

不等式$a \leq b$がSDMAで成り立つとき　$\models a \leq b$と書く．

［定義8］（SDMAでの等号の定義）

a, bをワードとする．$\vdash a \longrightarrow b$かつ$\vdash b \longrightarrow a$のとき$a \equiv b$とすれば，$\equiv$は同値関係である．そこで$A/_{\equiv}$（$A$の$\equiv$

による商集合)をあらためて A とし, $\equiv$ を $=$ とみなしたものを SDMA での等号とする．(つまり, リンデンバウム代数(Lindenbaum algebra)を考える．)

このとき, [3] , [4] と同様にして, 次のことが成り立つ.

[定理 2]　a, b をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\vDash a \leq b \qquad \text{ならば} \qquad \vdash a \longrightarrow b$$

(証明)

SDMA のすべての公理($F1 \sim F10^\circ$)が GSDMA で証明可能であることを示せばよいが, これらと同値な $T1 \sim T12^\circ$ が GSDMA で証明可能であることを示す.

$T1 \sim T9$ は[3]の定理 2 の証明と同じである.

$T9^\circ$: $\Longrightarrow$:

$$\dfrac{\neg y \longrightarrow \neg\neg\neg y \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg x \longrightarrow \neg\neg y}{\neg\neg\neg y \longrightarrow \neg\neg\neg x} \qquad \neg\neg\neg x \longrightarrow \neg x}{\neg\neg\neg y \longrightarrow \neg x}}{\neg y \longrightarrow \neg x}$$

$\Longleftarrow$:

$$\dfrac{\neg y \longrightarrow \neg x}{\neg\neg x \longrightarrow \neg\neg y}$$

$T10$: 始式 (B4) から成り立つ.

$T10^\circ$: 始式 (B5) から成り立つ.

$T11$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \longrightarrow x}{x, y \longrightarrow x} \qquad \dfrac{y \longrightarrow y}{x, y \longrightarrow y}}{x, y \longrightarrow x \wedge y}}{\neg (x \wedge y) \longrightarrow \neg y, \neg x}}{\neg\neg x, \neg\neg y \longrightarrow \neg\neg (x \wedge y)}}{\neg\neg x \wedge \neg\neg y \longrightarrow \neg\neg(x \wedge y)}$$

$T11^\circ$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \longrightarrow x}{x \longrightarrow y, x} \qquad \dfrac{y \longrightarrow y}{y \longrightarrow y, x}}{x \vee y \longrightarrow y, x}}{\neg x, \neg y \longrightarrow \neg (x \vee y)}}{\neg x \wedge \neg y \longrightarrow \neg (x \vee y)}$$

$T12$:

$$\dfrac{\dfrac{\longrightarrow 1}{\neg 1 \longrightarrow}}{\neg 1 \longrightarrow x} \qquad (\neg \longrightarrow \neg)$$

$T12^\circ$:

$$\dfrac{\dfrac{0 \longrightarrow}{\longrightarrow \neg 0}}{x \longrightarrow \neg 0} \qquad (\neg \longrightarrow \neg)$$

(証明終)

[定理 3]　$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\vdash a_1 \ldots, a_m \longrightarrow b_1, \ldots, b_n \qquad \text{ならば} \qquad \vDash a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$$

(証明)

Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ を x で表す．Δ が $b_1, \ldots, b_n$ のとき $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を y で表す．GSDMA の始式 $(B1)$, $(B2)$, $(B3)$, $(B4)$, $(B5)$ はそれぞれ $T1$, $T5$, $T5^\circ$, $T10$, $T10^\circ$ から SDMA で成り立つ．次に GSDMA の各推論規則の上式(上のシーケント)に対応する不等式が SDMA で成り立つと仮定するとき, 下式に対応する不等式が SDMA で成り立つことを示せばよい.

$(w \longrightarrow) \sim (\longrightarrow \wedge)$ は[3]の定理 3 の証明と同じである.

$(\neg \longrightarrow \neg)$: $\vDash x \leq y$ とすると $T9$ から $\vDash \neg y \leq \neg x$ が成り立つ.　(証明終)

以上により SDMA と GSDMA が演繹的に同値であることがわかる.

参考文献

[1] 荒金憲一, MS-algebra に双対な代数系について, 奈良高専研究紀要 28(1993), 105–111.

[2] 荒金憲一, ファジイ代数に関連する代数系について, 奈良高専研究紀要 31(1996), 81–89.

[3] 荒金憲一, MS 代数とストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 33(1998), 119–127.

[4] 荒金憲一, 準ストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 40(2005), 87-94.

[5] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift 39(1935), 176-216, 405–431.

[6] H.P. Sankappanavar, *Semi-De Morgan algebras*, The Journal of Symbolic Logic 52(1987), 712–724.