擬補分配束のシーケントによる形式化

荒金　憲一

Sequential formulations for pseudocomplemented distributive lattices

Kenichi　ARAGANE

最小元 0 と最大元 1 をもつ分配束 (bounded distributive lattice (BDL)：$F1 \sim F7^\circ$を満たす) で $*$ と$\wedge$, $\vee$に関する性質(ド・モルガン律に対応するもので $F8$, $F8^\circ$) と 0, 1 についての性質 ($F9$, $F9^\circ$) を満たす代数系が [2], [5], [7] で定義されている擬補分配束 (pseudocomplemented distributive lattice (PDL)：[2] の$\mathbb{P}$と同じ)である．本論文では，擬補分配束で成り立つ性質を調べる．そして擬補分配束と演繹的に同値な，G. Gentzen の方法 ([6]) でのシーケント (式) による形式的体系 GPDL を考える．[8] では，分配律が成り立たない擬補束を考え，シーケントによる形式的体系を扱って決定問題を解いているが，本論文では分配束としての擬補束を扱う．

§1　ワード

[3], [4] と同様にワードを定義する．

［定義１］（ワードの定義）

(1)　定数 0, 1 はワードである．

(2)　変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ はワードである．

(3)　x と y がワードのとき $x \wedge y$, $x \vee y$, x^* はワードである．

(4)　以上の (1), (2), (3) によって構成された記号列のみがワードである．

ワード全体の集合を A とし，２項演算$\vee, \wedge$と１項演算 $*$ をもつ代数系 $\mathbf{A} = (A,\ 0, 1, \vee, \wedge, *)$ を考える．

§2　擬補分配束 (PDL)

［定義２］（PDL の定義）

A の任意の元 x, y, z に対して，次の $F1 \sim F9^\circ$が成り立つとき，代数系 $\mathbf{A}$ を擬補分配束 (PDL) とよぶ．

$F1$	$x \wedge 0 = 0$	$F1^\circ$	$x \vee 1 = 1$
$F2$	$x \wedge 1 = x$	$F2^\circ$	$x \vee 0 = x$
$F3$	$x \wedge x = x$	$F3^\circ$	$x \vee x = x$
$F4$	$x \wedge y = y \wedge x$	$F4^\circ$	$x \vee y = y \vee x$
$F5$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$F5^\circ$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$F6$	$x \wedge (x \vee y) = x$	$F6^\circ$	$x \vee (x \wedge y) = x$
$F7$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$F7^\circ$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$F8$	$x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge y^*$	$F8^\circ$	$(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$
$F9$	$0^* = 1$	$F9^\circ$	$1^* = 0$

[定義３]（不等式の定義）
x，y を A の任意の元とする．$x \wedge y = x$ が成り立つとき，$x \leq y$ と書く．

[1], [3], [4] と同様にして，次の定理が成り立つ．

[定理１] 代数系 $\mathbf{A}$ が 擬補分配束 (PDL) であり(つまり $F1 \sim F9^\circ$が成り立つ)，かつ定義３により $x \leq y$ が定義される $\Longleftrightarrow$ A の任意の元 $x,\ y,\ z$ に対して $\mathbf{A}$ で次の $T1 \sim T12^\circ$が成り立つ．

$T1$	$x \leq x$		
$T2$	$x \leq y,\ y \leq x \Longleftrightarrow x = y$		
$T3$	$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$		
$T4$	$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$		
$T5$	$0 \leq x$	$T5^\circ$	$x \leq 1$
$T6$	$x \wedge y \leq x,\ x \wedge y \leq y$	$T6^\circ$	$x \leq x \vee y,\ y \leq x \vee y$
$T7$	$z \leq x,\ z \leq y \Longrightarrow z \leq x \wedge y$	$T7^\circ$	$x \leq z,\ y \leq z \Longrightarrow x \vee y \leq z$
$T8$	$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$T8^\circ$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$
$T9$	$x \leq y \Longrightarrow y^* \leq x^*$		
$T10$	$x \wedge y \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq y^*$		
$T11$	$x \wedge x^* \leq 0$		
$T12$	$x \wedge (x \wedge y)^* \leq x \wedge y^*$	$T12^\circ$	$x^* \wedge y^* \leq (x \vee y)^*$

（証明）
$\Longrightarrow$：
$T1 \sim T8^\circ$ は [3] の定理１の証明と同じである．
$T9$：$x \leq y$ とすると $T4$ より $x \vee y = y$. $F8^\circ$から $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^* = y^*$ で $y^* \leq x^*$が成り立つ．
$T10$：$\Longrightarrow$：$x \wedge y \leq 0$ とすると $T9$ から $0^* \leq (x \wedge y)^*$. これと $T1$ に注意２の$\wedge$の単調性を使い，$F8$, $F9$, $F2$ から $x \wedge y^* = x \wedge (x \wedge y)^* \geq x \wedge 0^* = x \wedge 1 = x$. $T6$ より $x \wedge y^* \leq x$ で $x \wedge y^* = x$ から $x \leq y^*$ が成り立つ．$\Longleftarrow$：$x \leq y^*$ とすると $x \wedge y^* = x$ から $x \wedge y = (x \wedge y^*) \wedge y = x \wedge (y \wedge y^*) \leq y \wedge y^* = y \wedge (y \wedge 1)^* = y \wedge 1^* = y \wedge 0 = 0$.
$T11$：$T10$ の $\Longleftarrow$ で x を x^* に，y を x にすれば $x^* \wedge x \leq 0 \Longleftarrow x^* \leq x^*$ であり，$T1$ により $x \wedge x^* \leq 0$ が成り立つ．
$T12$：$(x \wedge (x \wedge y)^*) \wedge y = (x \wedge y) \wedge (x \wedge y)^* \leq 0$ より $T10$ から $x \wedge (x \wedge y)^* \leq y^*$. $\wedge$ の単調性から $x \wedge (x \wedge (x \wedge y)^*) \leq x \wedge y^*$. よって $F5$, $F3$ から $x \wedge (x \wedge y)^* \leq x \wedge y^*$ が成り立つ．
$T12^\circ$：$(x^* \wedge y^*) \wedge (x \vee y) = (y^* \wedge x \wedge x^*) \vee (x^* \wedge y \wedge y^*) \leq 0 \vee 0 = 0$ より $T10$ を使って $x^* \wedge y^* \leq (x \vee y)^*$ が成り立つ．
$\Longleftarrow$：
定義３により $x \leq y$ が定義されることと $F1 \sim F7^\circ$は[3]の定理１の証明と同じである．
$F8$：$T6$ の $x \wedge y \leq y$ に $T9$ を使うと $y^* \leq (x \wedge y)^*$. $\wedge$ の単調性から $x \wedge y^* \leq x \wedge (x \wedge y)^*$. これと $T12$ で $T2$ により $x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge y^*$ が成り立つ．
$F8^\circ$：$T6^\circ$で $T9$ を使うと $(x \vee y)^* \leq x^*, y^*$. これらに $T7$ を使うと $(x \vee y)^* \leq x^* \wedge y^*$. これと $T12^\circ$から $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$ が成り立つ．
$F9$：$T6$ より $1 \wedge 0 \leq 0$ で $T10$ を使うと $1 \leq 0^*$. $T5^\circ$から $0^* \leq 1$ で $0^* = 1$ が成り立つ．
$F9^\circ$：$T10$ の $\Longleftarrow$ で x を 1^* に，y を 1 にすると $T1$ により $1^* \wedge 1 \leq 0$. $F2$ から $1^* \wedge 1 = 1^*$ で $1^* \leq 0$. $T5$ から $0 \leq 1^*$ で $1^* = 0$ が成り立つ．（証明終）

[3]と同様にして，次のことが成り立つ．
[注意１] 束 ($T1 \sim T4$ と $T6 \sim T7^\circ$が成り立つ) において，次の (1), (2) が成り立つ．
(1) $[x \leq x^{**}$ かつ $(x \leq y \Longrightarrow y^* \leq x^*)] \Longleftrightarrow [x \leq y^* \Longrightarrow y \leq x^*]$
(2) $[(x \vee y)^* \leq x^* \wedge y^*] \Longleftrightarrow [x \leq y \Longrightarrow y^* \leq x^*]$

（証明）

⑴：$\Longrightarrow$：$x \le y^*$ とすると仮定から $y^{**} \le x^*$ であり，$y \le y^{**} \le x^*$. $\Longleftarrow$：$T1$ より $x^* \le x^*$ で仮定から $x \le x^{**}$ が成り立つ．次に $x \le y$ とすると $x \le y \le y^{**}$ より $x \le y^{**}$ であり，仮定から $y^* \le x^*$ が成り立つ.

⑵：$\Longrightarrow$：$x \le y$ とすると $T4$ から $x \vee y = y$ で仮定の不等式の左辺にこれを代入して $y^* \le x^* \wedge y^*$. $T6$ より $x^* \wedge y^* \le x^*$ で $y^* \le x^*$ が成り立つ．$\Longleftarrow$：$T6^\circ$ で仮定を使うと $(x \vee y)^* \le x^*, y^*$. $T7$ により $(x \vee y)^* \le x^* \wedge y^*$ が成り立つ.（証明終）

[3] と同様にして，次のことが成り立つ.

［注意２］　束において，次の⑴，⑵が成り立つ.

⑴　$x \le y$, $u \le v \Longrightarrow x \wedge u \le y \wedge v$ ($\wedge$の単調性)

⑵　$x \le y$, $u \le v \Longrightarrow x \vee u \le y \vee v$ ($\vee$の単調性)

（証明）

⑴：$x \le y$, $u \le v$ とする. $x \wedge u \le x \le y$ から $x \wedge u \le y$. 同様に $x \wedge u \le u \le v$ から $x \wedge u \le v$. $T7$ を使うと $x \wedge u \le y \wedge v$ が成り立つ.

⑵：同様にして $x \le y \le y \vee v$, $u \le v \le y \vee v$ で $T7^\circ$ から $x \vee u \le y \vee v$ が成り立つ.（証明終）

[2], [5] と同様にして，次の性質が成り立つ.

［注意３］　擬補分配束(PDL) において，次のことが成り立つ．ただし，$F8^\circ$ を仮定しない.

⑴　$x \wedge y = 0 \Longleftrightarrow x \le y^*$

⑵　$x \wedge x^* = 0$

⑶　$x \le x^{**}$

⑷　$x^{***} = x^*$

⑸　$x \wedge y = 0 \Longleftrightarrow x^{**} \wedge y = 0$

⑹　$x \le y \Longrightarrow y^* \le x^*$

⑺　$(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$

⑻　$(x \wedge y)^{**} = x^{**} \wedge y^{**}$

⑼　$(x \vee y)^{**} = (x^{**} \vee y^{**})^{**}$

⑽　$(x \vee x^*)^* = 0$

⑾　$x \le y^* \Longleftrightarrow y \le x^*$

⑿　$x^* \vee y^* \le (x \wedge y)^*$

（証明）

⑴：$\Longrightarrow$：$x \wedge y = 0$ とすると $x \wedge y^* = x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge 0^* = x \wedge 1 = x$ から $x \le y^*$ が成り立つ. $\Longleftarrow$：$x \le y^*$ とすると $x \wedge y \le y^* \wedge y = y \wedge y^* = y \wedge (y \wedge 1)^* = y \wedge 1^* = y \wedge 0 = 0$ と $0 \le x \wedge y$ から $x \wedge y = 0$ が成り立つ.

⑵：定理１の $T11$ の証明と同様に⑴の $\Longleftarrow$ で x を x^* に，y を x にすれば $x^* \wedge x = 0 \Longleftarrow x^* \le x^*$ で $x \wedge x^* = 0$ が成り立つ.

⑶：⑵，⑴を使うと $x \wedge x^* = 0$ から $x \le (x^*)^*$.

⑷：上の⑶より $x^* \le (x^*)^{**}$. また $x \le (x^*)^*$ で$\wedge$の単調性から $x \wedge x^{***} \le x^{**} \wedge x^{***} = 0$. $x^{***} \wedge x = 0$ で上の⑴を使うと $x^{***} \le x^*$. よって $x^{***} = x^*$ が成り立つ.

⑸：$\Longrightarrow$：$x \wedge y = 0$ のとき，上の(1)により $y \le x^*$. $x^{**} \wedge y \le x^{**} \wedge x^* = 0$ から $x^{**} \wedge y = 0$ が成り立つ.

$\Longrightarrow$：$x^{**} \wedge y = 0$ のとき，上の⑶と$\wedge$の単調性により $x \wedge y \le x^{**} \wedge y = 0$ から $x \wedge y = 0$ が成り立つ.

⑹：$x \le y$ とする. $x \wedge y^* \le y \wedge y^* = 0$ から $x \wedge y^* = 0$ で上の(1)により $y^* \le x^*$ が成り立つ.

⑺：$x, y \le x \vee y$ で上の⑹を使うと $(x \vee y)^* \le x^*, y^*$. $T7$ から $(x \vee y)^* \le x^* \wedge y^*$. 次に定理１の $T12^\circ$ の証明と同様にして $(x^* \wedge y^*) \wedge (x \vee y) = (y^* \wedge x \wedge x^*) \vee (x^* \wedge y \wedge y^*) = 0 \vee 0 = 0$ より $x^* \wedge y^* \le (x \vee y)^*$. よって $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$ が成り立つ.

⑻：$x \wedge y \le x, y$ で上の⑹を２回使うと $(x \wedge y)^{**} \le x^{**}, y^{**}$ より $(x \wedge y)^{**} \le x^{**} \wedge y^{**}$. 次に $y \wedge (x \wedge (x \wedge$

$y)^*)=(x \wedge y)\wedge(x \wedge y)^*=0$ で上の(5)を使うと $x \wedge(y^{**} \wedge(x \wedge y)^*)=y^{**} \wedge(x \wedge(x \wedge y)^*)=0$. これに再び上の(5)を使うと $(x^{**} \wedge y^{**})\wedge(x \wedge y)^*=x^{**} \wedge(y^{**} \wedge(x \wedge y)^*)=0$. 上の(1)により $x^{**} \wedge y^{**} \leq (x \wedge y)^{**}$. よって $(x \wedge y)^{**}=x^{**} \wedge y^{**}$ が成り立つ.

(9)：上の(7)と(4)を使って $(x^{**} \vee y^{**})^{**}=(x^{***} \wedge y^{***})^*=(x^* \wedge y^*)^*=(x \vee y)^{**}$.

(10)： 上の(7)と(2)を使って $(x \vee x^*)^*=x^* \wedge x^{**}=0$.

(11)：$\Longrightarrow$ ：$x \leq y^*$ とすると上の(3)と(6)を使って $y \leq y^{**} \leq x^*$. $\Longleftarrow$ も同様にできる.

(12)：$x \wedge y \leq x,\ y$ に上の(6)を使って $x^*,\ y^* \leq (x \wedge y)^*$ で $T7°$ から $x^* \vee y^* \leq (x \wedge y)^*$. （証明終）

[2], [5] と同様にして, 次の同値性が成り立つ.

[注意４] **A** を BDL とすると, 次の(1)～(5)は互いに同値である.

(1) **A** は PDL である(つまり $F8,\ F8°,\ F9,\ F9°$ が成り立つ).

(2) $[(F8) x \wedge (x \wedge y)^*=x \wedge y^*]$ かつ $[x \wedge 0^*=x]$ かつ $[0^{**}=0]$

(3) $x \wedge y=0 \Longleftrightarrow x \leq y^*$

(4) $[x \wedge x^*=0]$ かつ $[(F8°)\ (x \vee y)^*=x^* \wedge y^*]$ かつ $[(x \wedge y)^{**}=x^{**} \wedge y^{**}]$ かつ $[x \leq x^{**}]$

(5) $[x \wedge x^*=0]$ かつ $[x \wedge y=0 \Longrightarrow x \leq y^*]$

（証明）

(1) $\Longrightarrow$ (2)：$x \wedge 0^*=x \wedge 1=x$. $0^{**}=(0^*)^*=1^*=0$.

(2) $\Longrightarrow$ (3)：注意３の(1)と同様にできるが, $0^*=1,\ 1^*=0$ を使わずに(2)の仮定だけで示すことができる. $\Longrightarrow$ ：$x \wedge y=0$ とすると仮定より $x \wedge y^*=x \wedge (x \wedge y)^*=x \wedge 0^*=x$ で $x \leq y^*$ が成り立つ. $\Longleftarrow$ ：$x \leq y^*$ とすると $x \wedge y \leq y^* \wedge y=y \wedge y^*=y \wedge(y \wedge 0^*)^*=y \wedge(0^*)^*=y \wedge 0=0$ で $x \wedge y=0$ が成り立つ.

(3) $\Longrightarrow$ (4)：注意３の(2), (7), (8), (3)の証明と同じである.

(4) $\Longrightarrow$ (5)：[2] の注意10の(2)での証明と同様にできるが, 仮定の(4)から $x \leq y \Longrightarrow y^* \leq x^* \cdots$ ① と $x^{***}=x^*$ と $1^*=0$ と $0^*=1$ が成り立つことを確認する. $x \leq y$ とすると $x \vee y=y$ で $y^*=(x \vee y)^*=x^* \wedge y^*$ から $y^* \leq x^*$. また仮定より $x^* \leq x^{***}$. $x \leq x^{**}$ に①を使うと $x^{***} \leq x^*$ で $x^{***}=x^*$ が成り立つ. $0=1 \wedge 1^*=1^*$ より $1^*=0$. これより $1^{**}=0^*$ で $1 \leq 1^{**}$ から $1 \leq 0^*$. $T5°$ より $0^* \leq 1$ で $0^*=1$ が成り立つ.そこで $x \wedge y=0$ とする. $y^*=y^{***}=(0 \vee y^*)^{**}=((x \wedge x^*)\vee y^*)^{**}=((x \vee y^*)\wedge(x^* \vee y^*))^{**}=(x \vee y^*)^{**} \wedge(x^* \vee y^*)^{**}$. ここで $(x^* \vee y^*)^{**}=(x^{**} \wedge y^{**})^*=((x \wedge y)^{**})^*=(0^{**})^*=1$ であるから $y^*=(x \vee y^*)^{**} \geq x \vee y^*$. また $T6°$ より $y^* \leq x \vee y^*$. よって $x \vee y^*=y^*$ から $x \leq y^*$.

(5) $\Longrightarrow$ (1)：$(x \wedge(x \wedge y)^*)\wedge y=(x \wedge y) \wedge (x \wedge y)^*=0$ で仮定から $x \wedge(x \wedge y)^* \leq y^*$. $\wedge$ の単調性から $x \wedge (x \wedge y)^*=x \wedge (x \wedge (x \wedge y)^*) \leq x \wedge y^*$. また $(x \wedge y^*) \wedge (x \wedge y)=x \wedge(y \wedge y^*)=x \wedge 0=0$ より仮定から $x \wedge y^* \leq (x \wedge y)^*$. $\wedge$ の単調性から $x \wedge y^*=x \wedge(x \wedge y^*) \leq x \wedge(x \wedge y)^*$. よって $x \wedge(x \wedge y)^*=x \wedge y^*$ が成り立つ. 注意３の(7)と同様にして $(x \vee y)^*=x^* \wedge y^*$ が成り立つ. 定理１の $\Longleftarrow$ の $F9$ の証明と同様にして $0 \wedge 1=0$ に仮定を使って $1 \leq 0^*$. $T5°$ から $0^* \leq 1$. よって $0^*=1$ が成り立つ. これから $1^*=(0^*)^*=0^{**} \wedge 1=0^{**} \wedge 0^*=0$ で $1^*=0$ が成り立つ. （証明終）

[注意５]

(1) 注意４の(2)は最大元１の代わりに 0^* を使ってもよいことを示している. つまり代数系 **A** から１を除いてもよい.

(2) ①$[x \wedge y=0 \Longrightarrow x \leq y^*] \Longleftrightarrow$ ② $[x \wedge y=0 \Longrightarrow y \leq x^*]$ が成り立つ. [2]では②の形になっているが, 本論文では①の形にした. ②の形で考えると, 注意４の(5)は **A** の任意の元 x が擬補元であることを示している. つまり x と互いに素な元の最大元が x^* である.

§3 PDL のシーケントによる形式的体系 GPDL

[3], [4]と同様にシーケントの定義をする.

[定義４]（シーケント(式)の定義）
ワードの有限列をギリシア大文字 Γ, Δ などで表す．ワードの有限列 $a_1, \ldots, a_m$ を Γ とし, $b_1, \ldots, b_n$ をΔとするとき, PDL での不等式 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ をシーケント(式) $\Gamma \longrightarrow \Delta$ で表す．ただし, Γ が空のとき($\Gamma = \emptyset$と書く), $1 \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ とし, $\Delta = \emptyset$ のときは $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq 0$ とする．$\Gamma = \Delta = \emptyset$の場合は考えない.

このとき, 擬補分配束 (PDL) のシーケントによる形式的体系 GPDL を [3], [4], [8] と同様に, 次のように定義する.
[定義５]（GPDL の定義）

［1］ 始式

$$(B1)\ a \longrightarrow a \qquad (B2)\ 0 \longrightarrow \Delta \qquad (B3)\ \Gamma \longrightarrow 1$$

［2］ 推論規則

⑴ 構造に関する推論規則:

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(w \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a}\,(\longrightarrow w)$$

$$\frac{a,\, a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(c \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a,\, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a}\,(\longrightarrow c)$$

$$\frac{\Gamma_1,\, a,\, b,\, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1,\, b,\, a,\, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\,(e \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\, a,\, b,\, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\, b,\, a,\ \Delta_2}\,(\longrightarrow e)$$

$$\frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1,\, a \qquad a,\, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1,\ \Delta_2}\,(cut)$$

⑵ 論理記号に関する推論規則：

$$\frac{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\wedge_1 \longrightarrow) \qquad \frac{b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\wedge_2 \longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a \vee b}\,(\longrightarrow \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a \vee b}\,(\longrightarrow \vee_2)$$

$$\frac{a,\ \Gamma \longrightarrow \Delta \quad b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \vee b,\ \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\vee \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a \quad \Gamma \longrightarrow \Delta,\, b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a \wedge b}\,(\longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{a,\ \Gamma \longrightarrow}{\Gamma \longrightarrow a^*}\,(\longrightarrow *) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow b}{b^*,\, \Gamma \longrightarrow}\,(* \longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Delta^* \longrightarrow \Gamma^*}\,(* \longrightarrow *)$$

ただし, Γが $a_1, \ldots, a_m$ のときΓ^*は $a_m^*, \ldots, a_1^*$ を表し, $\Gamma = \emptyset$のときは $\Gamma^* = \emptyset$とする.

([8]では $(\vee \longrightarrow)$ の Γ と $(\longrightarrow \wedge)$ の Δ が共に空であり, $(* \longrightarrow *)$ の Γ, Δ は共に 1 元だけになっている. 本論文では分配束であるので, これらの制限はない：定理 2 の $T8$, $T8^\circ$, $T12^\circ$).

§4 PDL と GPDL の演繹的同値性

[3], [4]と同様に次の定義をする.
[定義６]（$\vdash$の定義）
シーケント$\Gamma \longrightarrow \Delta$が GPDL で証明可能であるとき, $\vdash \Gamma \longrightarrow \Delta$と書く.

[定義７]（$\models$の定義）

不等式 $a \leq b$ が PDL で成り立つとき $\vDash a \leq b$ と書く.

［定義８］（PDL での等号の定義）

a, b をワードとする. $\vdash a \longrightarrow b$ かつ $\vdash b \longrightarrow a$ のとき $a \equiv b$ とすれば, $\equiv$は 同値関係である. そこで $A/_{\equiv}$ (A の$\equiv$による商集合)をあらためて A とし, $\equiv$を$=$とみなしたものを PDL での等号とする.（つまり, リンデンバウム代数 (Lindenbaum algebra) 考える.）

このとき, [3] , [4] と同様にして, 次のことが成り立つ.

［定理２］ a, b をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\vDash a \leq b \qquad \text{ならば} \qquad \vdash a \longrightarrow b$$

（証明）

PDL のすべての公理 ($F1 \sim F9^{\circ}$) が GPDL で証明可能であることを示せばよいが, これらと同値な $T1 \sim T12^{\circ}$が GPDL で証明可能であることを示す. $T1 \sim T7^{\circ}$は [3] の定理 2 の証明と同じである.

$T8$：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \longrightarrow x}{x \longrightarrow x \wedge y,\ x}}{x \wedge (y \vee z) \longrightarrow x \wedge y,\ x} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x \longrightarrow x}{x \longrightarrow x,\ z}}{x \wedge (y \vee z) \longrightarrow x,\ z} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{y \longrightarrow y}{y \longrightarrow y,\ z} \quad \dfrac{z \longrightarrow z}{z \longrightarrow y,\ z}}{y \vee z \longrightarrow y,\ z}}{x \wedge (y \vee z) \longrightarrow y,\ z}}{x \wedge (y \vee z) \longrightarrow x \wedge y,\ z}}{x \wedge (y \vee z) \longrightarrow x \wedge y\ ,\ x \wedge z}}{\dfrac{x \wedge (y \vee z) \longrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z),\ (x \wedge y) \vee (x \wedge z)}{x \wedge (y \vee z) \longrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)}}$$

$T8^{\circ}$：$T8$ と双対である

$T9$： $\dfrac{x \longrightarrow y}{y^* \longrightarrow x^*}$

$T10$：$\Longrightarrow$： $\dfrac{\dfrac{x,\ y \longrightarrow}{y,\ x \longrightarrow}}{x \longrightarrow y^*}$　　$\Longleftarrow$： $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{y \longrightarrow y}{y^*,\ y \longrightarrow}}{y \longrightarrow y^{**}} \quad \dfrac{x \longrightarrow y^*}{y^{**},\ x \longrightarrow}}{y,\ x \longrightarrow}}{x,\ y \longrightarrow}}{}$

$T11$： $\dfrac{\dfrac{x \longrightarrow x}{x^*, x \longrightarrow}}{x, x^* \longrightarrow}$

$T12$： $\dfrac{\dfrac{x \longrightarrow x}{x \wedge y^* \longrightarrow x} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{y \longrightarrow y}{x \wedge y \longrightarrow y}}{y^* \longrightarrow (x \wedge y)^*}}{x \wedge y^* \longrightarrow (x \wedge y)^*}}{x \wedge y^* \longrightarrow x \wedge (x \wedge y)^*}$

$T12^{\circ}$： $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \longrightarrow x}{x \longrightarrow y,\ x} \quad \dfrac{y \longrightarrow y}{y \longrightarrow y,\ x}}{x \vee y \longrightarrow y,\ x}}{x^*,\ y^* \longrightarrow (x \vee y)^*}}{x^* \wedge y^* \longrightarrow (x \vee y)^*}$

（証明終）

［定理３］ $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\vdash a_1, \ldots, a_m \longrightarrow b_1, \ldots, b_n \quad \text{ならば} \ \vDash a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$$

（証明）

Γが $a_1, \ldots, a_m$ のとき $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ を x で表す. Δが $b_1, \ldots, b_n$ のとき $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を y で表す.

GPDL の始式 ($B1$), ($B2$), ($B3$) はそれぞれ $T1$, $T5$, $T5^{\circ}$から PDL で成り立つ. 次に GPDL の各推論規則の上式(上のシーケント)に対応する不等式が PDL で成り立つと仮定するとき, 下式に対応する不等式が PDL で成り立つことを示せばよい.

($w \longrightarrow$) $\sim$ ($\longrightarrow \wedge$) は [3] の定理 3 の証明と同じである.

($\longrightarrow *$)：$\vDash a \wedge x \leq 0$ とする. $F4$ より $a \wedge x = x \wedge a$ で $T10$ の $\Longrightarrow$ から $\vDash x \leq a^*$ が成り立つ.

($* \longrightarrow$)：$\vDash x \leq b$ とする. $\wedge$の単調性を使うと $\vDash b^* \wedge x \leq b^* \wedge b$. $T11$ から $\vDash b^* \wedge b \leq 0$ で $\vDash b^* \wedge x \leq 0$ が成り立つ.

$(* \longrightarrow *)$：$\models x \leq y$ とすると $T9$ から $\models y^* \leq x^*$ が成り立つ. （証明終）

以上により PDL と GPDL が演繹的に同値であることがわかる.

参考文献

[1] 荒金 憲一, MS-algebra に双対な代数系について, 奈良高専研究紀要 28(1993), 105-111.

[2] 荒金 憲一, ファジイ代数に関連する代数系について, 奈良高専研究紀要 31(1996), 81-89.

[3] 荒金 憲一, MS 代数とストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 33(1998), 119-127.

[4] 荒金 憲一, 準ストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 40(2005), 87-94.

[5] R. Balbes and P. Dwinger, ***Distributive lattices***, University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.

[6] G. Gentzen, ***Untersuchungen über das logische Schliessen***, Mathematische Zeitschrift 39(1935), 176-216, 405-431.

[7] H.P. Sankappanavar, ***Semi-De Morgan algebaras***, The Journal of Symbolic Logic 52(1987), 712-724.

[8] S. Tamura, ***Decision procedure for pseudo-complemented lattices***, Proceedings of the 8th symposium on semi-groups (1984), 36-39.