N種類のリボン型をもつ二次元リボン結び目

安田　智之

Ribbon 2-knots with n ribbon types

Tomoyuki YASUDA

二次元リボン結び目とは四次元ユークリッド空間内において、m個の二次元球面からなる自明な二次元絡み目に対して、m－１個の二次元円環領域を繋げることによって得られる二次元球面である。特に２個の二次元球面に１個の二次元円環領域を繋げて得られる二次元リボン結び目のことを２ベース二次元リボン結び目というが、このタイプの結び目でさえ、その繋ぎ方は唯一通りでないことが［1］において初めて示された。即ち二種類のリボン表示を持つ二次元リボン結び目が存在する。その後、［2］においてｎ種類（ｎは３以上の任意整数）のリボン表示を持つ二次元リボン結び目の存在することが示された。一方、ひとつの二次元リボン結び目が与えられた時、そのリボン表示の二次元円環領域が二次元球面と交差する回数の最小数のことを、その二次元リボン結び目の交差数というが、［2］で構成された二次元リボン結び目の交差数は１＋２＋…＋ｎ 以下としか評価されていないものであった。これに対して、本論文では、ｎ種類のリボン表示をもつが、［2］で構成されたものよりも少ない交差数をもつ二次元リボン結び目を構成する。即ち３以上の任意正整数ｎに対し、ｎ種類のリボン表示をもつ交差数ｎの２ベース二次元リボン結び目が存在することを示す。

0. 緒　　論

二次元リボン結び目とは四次元ユークリッド空間においてｍ個の二次元球面をｍ－１個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成される二次元球面である。自明でない二次元球面として二次元リボン結び目が発見されて以来、ひとつの二次元リボン結び目K^2を構成するのにどんな方法があるか、また本質的に何種類の方法があるのか、という問題に関心がもたれてきた。ここで用語の定義であるが、K^2を構成するための球面と円環領域との対のことをK^2のリボン表示といい、ｍ個の球面とｍ－１個の円環領域の対で表されるK^2のリボン表示のことをK^2のｍベースリボン表示という。また、K^2の総てのリボン表示を考えたとき、それらのベース数のうちの最小数のことをK^2のベース数といい、$\mathrm{b}(K^2)$で表す。そして$b(K^2)$がｍであればK^2はｍベース二次元リボン結び目であるという。［1］においては、２ベース二次元リボン結び目でさえ、二つの異なる種類のリボン表示を持つことが示された。即ち二つの二次元球面に対し、ひとつの円環領域を本質的に異なる二つの方法で繋げても同じ二次元リボン結び目の得られる実例のあることが示されたのである。この二次元リボン結び目は二つのリボン型を持つという。更に［2］では三つ以上のリボン型を持つ２ベース二次元リボン結び目の存在することが示された。一方、二次元リボン結び目K^2のリボン表示Rにおいて、これを構成する円環領域が球面と交差する回数のことをRのリボン交差数といい、$cr(R)$で表す。また、K^2のすべてのリボン表示を考えたとき、そのリボン交差数の最小数のことをK^2の交差数といい、$cr(K^2)$で表す。本論文ではこの観点から［2］における結果を見直す。そうして新しい結果を付け加える。［2］においては３以上の任意整数nに対してn個の異なるリボン型を持つ２ベース二次元リボン結び目K^2の存在することが示されたのであるが、その交差数$\mathrm{c}r(K^2)$は$1+2+\cdot\cdot\cdot+n$以下であることしか評価されていなかった。一方、本論文では次のことを示す。

定理　３以上の任意整数に対して次の性質を持つようなn個の異なるリボン型　$R_1, R_2, \cdots, R_\mathrm{n}$を持つ２ベースリボン結び目$K^2$が存在する。

$$cr(R_1)=cr(R_2)=\cdots=cr(R_\mathrm{n}) \text{ かつ } cr(K^2)=n.$$

1．準　　備

1．1　定義　（[3]）

$\{D^3_\mu \mid \mu = 1, 2, \cdots, m\}$ を互いに交わらない四次元ユークリッド空間 R^4 内の三次元球体の族とする。また、$\partial D^3_\mu = O^2_\mu$とおく。

一方、$f^r_{i_r j_r} : D^2 \times I \rightarrow R^4$

$(r = 1, 2, \cdots, m-1;\ i_r, j_r = 1, 2, \cdots, m)$ を、像が互いに交わらない埋め込みの族とし、かつ、次の性質(1)、(2)を満たすものとする。但しD^2は二次元球体、$\mathrm{I} = [0, 1]$である。

(1) $f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \mathrm{I}) \cap O^2_\mu = \begin{cases} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \{0\}) & (i_r = \mu) \\ f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \{1\}) & (j_r = \mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \mathrm{I}) \cup (\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu)$ は連結。

ここで K^2を二次元球面

$(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu) \cup (\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(\partial D^2 \times \mathrm{I})) - \mathring{\mathrm{T}}$ とする。但し$T = \bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \partial \mathrm{I})$であり$\mathring{\mathrm{T}}$ は Tの内部を表す。この時、K^2のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

1．2　定義　（[3]）

$\mathcal{O} = \bigcup_{\mu=1}^{m} D^3_\mu$，$\mathcal{B} = \bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \mathrm{I})$とおくとき（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）のことを二次元リボン結び目K^2に対するmベースリボン表示(或いは単にリボン表示)と呼ぶ。また$\mathcal{O}$をベース、$\mathcal{B}$をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目K^2に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことをK^2のベース数と呼び$b(K^2)$で表す。このときK^2は$b(K^2)$ベース二次元リボン結び目であるという。

1．3　定義　（[3]）

$l_r = f^r_{i_r j_r}(\{0\} \times \mathrm{I})$ $(r = 1, 2, \cdots, m-1)$とおく。但し、$\{0\}$はD^2の中心点である。ここで各l_rが$\mathcal{O}$に有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各l_rの方向に従ってa_{r1}, a_{r2}, $\cdots$, a_{rs_r}とし（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）のリボン交差と呼ぶ。但し各l_rの方向は O^2_i から O^2_j へ向かう方向とする。この時 $\mathrm{n} = \sum_{r=1}^{m-1} s_r$をリボン表示のリボン交差数と呼び、（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）はn 交差リボン表示であるという。そうしてK^2に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことをK^2の最小交差数(或いは単に交差数)と呼び$cr(K^2)$ で表す。

1．4　定義

a_{r1}, a_{r2}, $\cdots$, a_{rs_r} に対応して、s_r 個の文字からなる語w_rをつくる。つくり方はl_rがD^3_μ に点a_{rv} $(v = 1, 2, \cdots, \mathrm{s}_r)$で正の側から交わるとき、$w_r$ のv 番目の文字をx_μ、負の側から交わるときは同様x^{-1}_μとするものとする。このようにしてつくられた語 w_1, w_2, $\cdots$, w_{m-1}を利用してK^2の結び目群 $\pi_1(R^4 - K^2)$ の群表示を次の様に構成できる。

(＊1) $[\,x_\mu;\ \mu = 1, 2, \cdots, m \mid x_{i_r} w_r x^{-1}_{j_r} w^{-1}_r;\ r = 1, 2, \cdots, m-1\,]$

但し各 x_μ は O^2_μのメリディアン生成元とする([4])。以上の様な構成法でリボン表示（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）から得られた群表示(＊1)のことを（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）に関連したリボン群表示と呼ぶ。また各w_rのことをこのリボン群表示の語と呼ぶ。一方、リボン群表示（＊1）からは、逆の手順でリボン表示（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）を定められるので（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）のことをリボン群表示（＊1）に関連したリボン表示と呼ぶ。

1．5　定義　（[2]）

二つの2ベース二次元リボン結び目K^2_{I}、K^2_{II}に対し、（$\mathcal{O}_{\mathrm{I}}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$）、（$\mathcal{O}_{\mathrm{II}}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}$）がそれぞれのリボン表示であるとする。このとき、二つのリボン表示が同じリボン型であるとは、ある、四次元ユークリッド空間R^4からR^4 への向き付けを保つ同相写像h があって、

$h(K^2_{\mathrm{I}}) = K^2_{\mathrm{II}}$ かつ　$\mathrm{h}(\mathcal{B}_{\mathrm{I}}) = \mathcal{B}_{\mathrm{II}}$

が成立することをいう。

今、2ベース二次元リボン結び目K^2_{I}、K^2_{II}のリボン表示（$\mathcal{O}_{\mathrm{I}}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$）、（$\mathcal{O}_{\mathrm{II}}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}$）に関連したリボン群表示がそれぞれ

$[\,x_0, x_1 \mid x_0 w_{\mathrm{I}} x^{-1}_1 w^{-1}_{\mathrm{I}}\,]$、

$[\,x_0, x_1 \mid x_0 w_{\mathrm{II}} x^{-1}_1 w^{-1}_{\mathrm{II}}\,]$であるとする。

但し、w_r $(r = \mathrm{I}, \mathrm{II})$ はx_0、x^{-1}_0、x_1、x^{-1}_1からなる語である。ここでこれらの語はx_1またはx^{-1}_1から始まり、x_0またはx^{-1}_0で終わるとしてよい。また、x_0とx^{-1}_0、x_1とx^{-1}_1は連続する文字とならないとしてよい。

ここでw_{r} $(r = \mathrm{I}, \mathrm{II})$ から新しい語を次のようにしてつくる。w_{r}のx_0、x_1にそれぞれx_1、x_0を代入して出来る語をw^*、　それぞれx^{-1}_0、x^{-1}_1を代入して出来る語をw^{**}、それぞれx^{-1}_1、x^{-1}_0を代入して出来る語をw^{***}、とする。このとき、$W_r = \{w, w^{-1}, w^*, w^{*-1}, w^{**}, w^{**-1}, w^{***}, w^{***-1}\}$ は2ベースリボン表示の不変量となることが知られている。即ち次の補題が成立する。

1．7　補題　（[2]）

二次元リボン結び目の二つの2ベースリボン表示（$\mathcal{O}_{\mathrm{I}}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$）、（$\mathcal{O}_{\mathrm{II}}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}$）が同じリボン型をもつならば、$W_{\mathrm{I}} = W_{\mathrm{II}}$である。

2． 定理の証明

次のリボン群表示に関連したリボン表示
($\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$) を持つ二次元リボン結び目を$\boldsymbol{K}^2$とする。
$G=[\,x_0, x_1, \cdots, x_n \mid r_1, r_2, \cdots, r_n\,]$
但し、$r_i=x_0x_{i+1}x_i^{-1}x_{i+1}^{-1}$ ($i=1,2,\cdots,n-1$) かつ $r_n=x_0x_1^{-1}x_n^{-1}x_1$ である。また、r_i ($i=1,2,\cdots,n$) に対応する$\mathcal{B}$のバンドを$\boldsymbol{b}_i$とし、x_i ($i=0,1,\cdots,n$) に対応する$\mathcal{O}$のベースを$\boldsymbol{D}_i^3$とおく。以下では$\boldsymbol{K}^2$ がn個の異なるリボン型の２ベースリボン表示 ($\mathcal{O}_1$, $\mathcal{B}_1$)、($\mathcal{O}_2$, $\mathcal{B}_2$)、…、($\mathcal{O}_n$, $\mathcal{B}_n$) をもつことを示す。また、これらのリボン交差数は総て同じで、かつ$\boldsymbol{K}^2$の交差点がnであることを示す。

2．1 ($\mathcal{O}_1$, $\mathcal{B}_1$) の構成

リボン表示($\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$)において、$\boldsymbol{b}_1$を以下のように順次変形していくことにより２ベース表示 ($\mathcal{O}_1$, $\mathcal{B}_1$) を得る。まず、$\boldsymbol{b}_1$を$\boldsymbol{b}_2$に通す安定同値変形（[5]）を行うと、次のリボン群表示に関連したリボン表示を得る。
$[\,x_0, x_1, \cdots, x_n \mid r_{12}, r_2, r_3, \cdots, r_n\,]$
但し、$r_{12}=x_0\,w_{12}\,x_1^{-1}w_{12}^{-1}$ 、
　　$w_{12}=x_3^{-1}\,x_0\,x_3$ である。
とし、これに対応するバンドを$\boldsymbol{b}_{12}$ とする。ここでバンド$\boldsymbol{b}_2$ とベース$\boldsymbol{D}_2^3$ を消滅させる安定同値変形を行うと次のリボン表示に関連したリボン表示を得る。
$[\,x_0, x_1, x_3, x_4, \cdots, x_n \mid r_{12}, r_3, r_4, \cdots, r_n\,]$

次に、$\boldsymbol{b}_{12}$を$\boldsymbol{b}_3$に通す安定同値変形（[5]）を行い、続いてバンド$\boldsymbol{b}_3$とベース$\boldsymbol{D}_3^3$を消滅させる安定同値変形を行うと、次のリボン群表示に関連したリボン表示を得る。
$[\,x_0, x_1, x_4, x_5, \cdots, x_n \mid r_{13}, r_4, r_5 \cdots, r_n\,]$
但し、$r_{13}=x_0\,w_{13}\,x_1^{-1}w_{13}^{-1}$ 、
$w_{13}=x_4^{-1}x_0^{-1}x_4\,x_0\,x_4^{-1}x_0\,x_4$である。

更に、$\boldsymbol{b}_{13}$を$\boldsymbol{b}_4$に通す安定同値変形を行い、続いてバンド$\boldsymbol{b}_4$とベース$\boldsymbol{D}_4^3$を消滅させる安定同値変形を行うと、次のリボン群表示に関連したリボン表示を得る。
$[\,x_0, x_1, x_5, x_6, \cdots, x_n \mid r_{14}, r_5, r_6, \cdots, r_n\,]$
但し、$r_{14}=x_0\,w_{14}\,x_1^{-1}w_{14}^{-1}$、
$w_{14}=x_5^{-1}x_0^{-1}x_5\,x_0^{-1}x_5^{-1}x_0\,x_5\,x_0\,x_5^{-1}x_0^{-1}x_5$
$x_0\,x_5^{-1}x_0\,x_5$ である。

同様に、バンド$\boldsymbol{b}_1$を変形したバンド$\boldsymbol{b}_{1i}$ ($i=5, 6, \cdots, n$) を$\boldsymbol{b}_{i+1}$ に通し、続いて$\boldsymbol{b}_{i+1}$と$\boldsymbol{D}_{i+1}^3$を消滅させる安定同値変形を順次行っていくと、次のリボン群表示に関連したリボン表示を得る。
$[\,x_0, x_1 \mid x_0\,w_{1n}\,x_1^{-1}x_{1n}^{-1}\,]$
但し、w_{1n}は以下に述べる特徴を持った語である。今、w_{1n}の各文字を数直線上に置くことを考える。w_{12}の３文字は -1/2, 0, 1/2 の位置に、w_{13}の７文字は -3/4, -2/4, - 1/4, 0, 1/4, 2/4, 3/4 の位置に、w_{14}の15文字は-7/8, -6/8, -5/8, -4/8, -3/8, -2/8, -1/8, 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8 の位置に、それぞれ先頭の文字から置いていくとする。この操作を順次続けるとw_{1n}の2^n-1個の文字は$-(2^{n-1}-1)/2^{n-1}$の位置から$(2^{n-1}-1)/2^{n-1}$ の位置まで並ぶことになり、

(＊2)　　0, 1/2, 3/4, 7/8, …,
　　　　$(2^{n-2}-1)/2^{n-2}$, $(2^{n-1}-1)/2^{n-1}$
　　　　の位置

の文字はすべてx_0であることが分かる。ここで、w_{1n}の最後の文字はx_1^{-1} であり、これに対応するリボン表示のリボン交差はベース$\boldsymbol{D}_1^3$への交差なので安定同値変形によって解消する。それに従い、w_{1n}の最後の文字を消した語をw_1とおく。このとき、リボン群表示
$[\,x_0, x_1 \mid x_0\,w_1\,x_1^{-1}w_1^{-1}\,]$
に関連したリボン表示を ($\mathcal{O}_1$, $\mathcal{B}_1$) とおく。

2．2 ($\mathcal{O}_i$, $\mathcal{B}_i$) の構成

ここではリボン表示 ($\mathcal{O}_1$, $\mathcal{B}_1$) の構成と同様にして ($\mathcal{O}_i$, $\mathcal{B}_i$) ($i=2,3,\cdots,n$) を構成し、それに関連するリボン群表示の語の特徴を述べる。

2.1節と同様にしてバンド$\boldsymbol{b}_i$をバンド$\boldsymbol{b}_\mu$ ($\mu=i+1, i+2, \cdots, i+n-1$. 但し、添え字$\mu$が$n$ を超えたらnを法とした数字で考える)に通し$\boldsymbol{b}_\mu$と$\boldsymbol{D}_\mu^3$を消滅させる安定同値変形を順次行っていくと次のリボン群表示に関連したリボン表示を得る。
$[\,x_0, x_i \mid x_0\,w_{i\ i-1}\,x_i^{-1}\,w_{i\ i-1}^{-1}\,]$
但し、$w_{i\,i-1}$は (＊2) の位置の文字がひとつを除いて総てx_0 であるような語である。x_0^{-1}であるのは$(2^{n-1}-2^{i-1})/2^{n-1}$の位置の文字のみである。ここで$w_{i\ i-1}$ の最後の文字はx_iまたはx_i^{-1}であり、これに対応するリボン表示のリボン交差はベース$\boldsymbol{D}_i^3$への交差なので安定同値変形によって解消する。それに従い、$w_{i\ i-1}$ の最後の文字を消した語をw_iとおく。このとき、リボン群表示
$G_i=[\,x_0, x_i \mid x_0\,w_i\,x_i^{-1}\,w_i^{-1}\,]$
に関連したリボン表示を ($\mathcal{O}_i$, $\mathcal{B}_i$) とおく。

2．3 リボン型の相異

２．１節，２．２節で構成したリボン表示およびリボン群表示を比較するためにリボン群表示の生成元x_i ($i=2,3,\cdots,n$) を改めてx_1とする。また、語 w_i ($i=1,2,3,\cdots,n$) から定義 (1.5) の方法によって八つの

語からなる集合W_iを構成し、

$W_i^+ = \{ w_i,\ w^*_i,\ w^{**}_i,\ w_i^{***} \}$、

$W_i^- = \{ w^{-1}_i,\ w^{*-1}_i,\ w^{**-1}_i,\ w_i^{***-1} \}$ とおく。このとき、w_1、w_2、…、w_nから任意の語w_jを採ってくる。w_jは（＊2）の位置の文字を比較することによりどのW_μ^+（$\mu \neq j$）にも属さないことが分かる。

一方、どのW_μ^-（$\mu \neq j$）にも属さないことが以下のようにして分かる。今、W_μ^+に属する語の2^n-2個の文字は$-(2^{n-1}-1)/2^{n-1}$, $-(2^{n-1}-2)/2^n$, …, $(2^{n-1}-3)/2^{n-1}$, $(2^{n-1}-2)/2^{n-1}$の位置に並んでいる。2．1節、2．2節でのw_iの構成の仕方から、W_μ^- に属する語は最後の文字の逆元を先頭に加えると中央の位置の文字に対して歪対称な 2^n-1個の文字列になる。従ってもしw_jがいずれかのW_μ^-に属しているのならば、w_jは$-2^{n-1}/2^{n-1}$ の位置に最後の文字の逆元を加えると $-1/2^{n-1}$ に対して歪対称になる。よって、今 $-1/2^{n-1}$, 0, $1/2^{n-1}$ の位置の文字の符号が 各々 ＋，＋，－ であったとすると$-3/2^{n-1}$, $-2/2^{n-1}$, $-1/2^{n-1}$, 0, $-1/2^{n-1}$の位置の文字の符号は各々＋，－，＋，＋，－となる。ところが、$-3/2^{n-1}$, $-2/2^{n-1}$, $-1/2^{n-1}$ の位置にあるw_jの文字は、2．1節と2．2節でのリボン表示（$\mathcal{O}_i$, $\mathcal{B}_i$）の構成において最後の段階の「バンドをバンドに通す操作」で現れたリボン交差に対応する文字列である。即ち、2．2節のx_iをx_1に変えた語だと$x_1^{-1}x_0x_1$または$x_1^{-1}x_0^{-1}x_1$または$x_1x_0x_1^{-1}$または$x_1x_0^{-1}x_1^{-1}$である。つまり$-3/2^{n-1}$, $-2/2^{n-1}$, $-1/2^{n-1}$の位置の文字は ＋，－，＋ にはなりえない。これは矛盾である。w_iの$-1/2^{n-1}$, 0, $1/2^{n-1}$ の位置の文字が＋，＋，－以外のとき、即ち、＋，－，－または－，＋，＋または－，－，＋のときも同様に矛盾が生じる。以上により、$W_\mu \neq W_j$($\mu \neq j$)であり、2ベースリボン表示R_i=($\mathcal{O}_i$, $\mathcal{B}_i$)（$i = 1, 2, \cdots, n$）は総て異なるリボン型を持つことが分かる。また、これらの構成の仕方より、$cr(R_i) = 2^n - 2$である。

2．4 最小交差数

一方、Gに対して［6］における二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式の計算法を適用すると、簡単にK^2のアレキサンダー多項式Δが求まり、

$\Delta = (1-t)^n + (-1)^n t^n - 1 \pmod{\pm t^a}$

であり、多項式の次数はnである。［7］の結果より、$cr(K^2)$はn以上であると下から評価できるのだが、リボン表示（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）はリボン交差数がnのリボン表示だったのでcr(K^2)はちょうどnであると分かる。

（証了）

参考文献

[1] Yasuda, T., Ribbon knots with two ribbon types, *J. Knot Theory Ramifications* **1** (1992) , 477-482.

[2] Marumoto, Y.; Uchida, Y.; Yasuda, T., Motions of trivial links, and ribbon knots, *Michigan Math. J.* **42** (1995) 463-477.

[3] Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), 999-1003.

[4] Yajima, T., On characterization of knot groups of some spheres in R , *Osaka J. Math.* **6** (1969), 435-446.

[5] Marumoto, Y., Stably equivalence of ribbon presentations, *J. Knot Theory Ramifications* **1** (1992), 241-251.

[6] Yasuda,T., A presentation and genus for ribbon n-knots, *Kobe J. Math.* **6** (1989), 71-88.

[7] Yasuda,T., An evaluation of the crossing number on ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006), 1- 9.