# TSPを用いた周波数応答測定のシミュレーション

近藤　勝也

Simulation of measuring frequency characteristics of systems with TSP

Katsuya KONDO

Sinusoidal noises and nonlinear elements contained in a system affect accuracy of a frequency characteristics measurement using a time-stretched pulse (TSP). A simulation model has been made to study the influence of sinusoidal noises and nonlinear elements to the measured results by numerical calculation. The simulation model is composed of TSP generation, dynamic response calculation of measuring system and analysis of frequency characteristics with measured data. Mathematical software named Mathcad is used for simulation program and the program list is attached in an appendix. An example of simulated results shows that the simulation model is useful to study above influence.

## 1．はじめに

音響システムや制御システムの研究分野において，対象システムの周波数特性が重要になることが多い．このため対象システムに正弦波信号を入力することによる周波数応答の測定が行われる．しかしこの方法には，正弦波の周波数を広い範囲にわたって変えなければならないので，測定に時間がかかるという欠点がある．そこでこの解決法として，全周波数成分を均等に含む信号であるインパルスを用いて周波数応答を測定する方法がよく知られている．しかし，この方法には純粋なインパルスのエネルギーが小さいことによる，信号雑音比(SNR)の低下という欠点がある．これを改善するため音響システムの分野において，インパルスを時間的に引き延ばしてエネルギーを大きくした，時間引き延ばしパルス（TSP：Time- stretched pulse)が考案され，精度の良い測定方法が確立された．著者は以前にこのTSPを用いた周波数応答の測定を，高等専門学校の卒業研究で使用するという立場から計算方法と計算プログラムを整理した[1)]．

さらにその後著者は，このTSPを用いた周波数応答の測定方法を，ローパスフィルタ(以下LPF)とサーボモータ速度制御系の測定に適用した[2)]．その結果，LPFの測定結果は理論値とよく合ったが，サーボモータの測定は不満足な結果に終わった．その原因はサーボモータ速度制御系には回転ムラに起因した正弦波ノイズや加・減速トルクの差に起因した非線形要素が含まれていることにあると思われた．そこで，このような正弦波ノイズや非線形性がTSPを用いた周波数応答の測定におよぼす影響を，シミュレーションによって詳細に検討することにした．そのため，線形な測定対象であるLPFに，正弦波ノイズや非線形性を加えられるようにしたシミュレーションモデルを作成した．本報ではシミュレーション計算の詳細とその計算例について説明する．

## 2．シミュレーション計算

### 2.1 シミュレーションの概要

今回作成したシミュレーションモデルの構成を図1に示す．モデルはTSP信号作成部，TSP応答計算部及び周波数応答解析部で構成されている．そのうち，TSP信号作成と周波数解析では一括処理の計算を行い，TSP応答計算ではシミュレーション上の時間刻み幅dt[s]毎に測定対象の時間応答を計算する．先の文献[1)]（以後この文献を当該文献と呼ぶ）との関係は，２つの一括処理の計算は当該文献の図5(p76)と同じ計算を行う．同図にある測定対象に対応するのがTSP応答計算であるが，当該文献にはその内容については述べられていない．

全体の計算の流れとしては，始めにTSP信号作成部

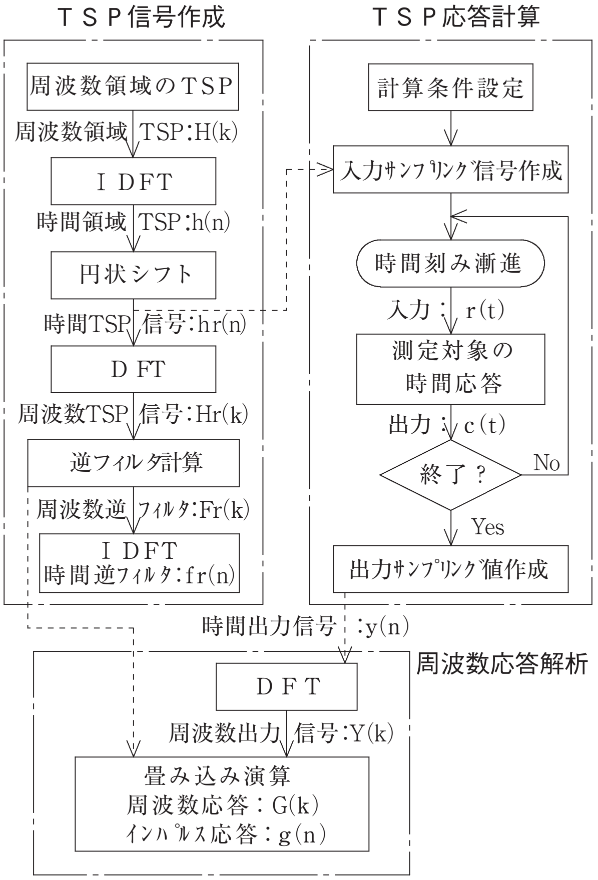


図１　TSPを用いた周波数応答測定のシミュレーションモデル

でTSP信号を作成する．次にTSP応答計算部において，これを測定対象に入力してその出力を計算する．最後に周波数解析部で，この測定対象の出力信号とTSP信号の逆フィルタを用いて周波数特性を計算する．以下に図１の各部の計算方法を説明するが，当該文献と同じ内容を表す変数はそれと同じ記号を用いた．

### 2.2 TSP信号作成と周波数応答解析

⑴TSP信号作成

先ず周波数領域のTSPである$H(k)$を当該文献の(3)，(4)式(p74)を用いて計算する．次に$H(k)$を離散フーリエ逆変換(IDFT)して，離散時間領域のTSPである$h(n)$を得る．これを円状シフトして，実際の測定に使用するTSPである$hr(n)$を得，TSP応答計算部に渡す．この時系列番号$n$は，TSP入力信号のサンプリング番号になる．

TSP信号作成部では，続いて$hr(n)$を離散フーリエ変換(DFT)して$Hr(k)$を求め，更にTSP信号の逆フィルタ$Fr(k)$を当該文献の(8)式によって計算する．これをIDFTして，時間領域の逆フィルタ$fr(n)$を得る．$hr(n)$は正弦波のスイープ(掃引)が高い周波数から始まって低い周波数に向かうのに対し，その逆フィルタである$fr(n)$は低い周波数から高い周波数に向かって掃引する．お互いに逆フィルタの関係にあるので，どちらをTSP応答の入力信号に使ってもよい．

⑵周波数応答解析

TSP応答計算部の出力として，TSP信号を測定対象に入力したときの出力信号$y(n)$が得られる．$y(n)$をDFTして離散周波数領域の出力信号$Y(k)$を求め，これと先の逆フィルタ$Fr(k)$の畳み込み積分を当該文献⑼式(p77)に基づいて行うと，測定対象の周波数応答$G(k)$が得られる．また$G(k)$をIDFTするとインパルス応答$g(n)$が得られる．

### 2.3 測定対象のTSP応答計算

図１のTSP応答計算部では，連続時間(アナログ)の現象である測定対象の動きを，時間刻み幅dt[s]毎の離散時間の計算値でシミュレートする．したがって連続時間の現象を精度良くシミュレーションするためには，dtの値を十分小さくすることが必要であると言われている．

次にTSP応答は，dtとは異なる(より時間の長い)サンプリング周期で測定される．そこで図の入力サンプリング信号作成では，dt[s]毎の計算に用いる入力信号$r(t)$を，サンプリング信号$hr(n)$と同じ波形になるように予め計算しておく．また全ての計算が終わった後に，出力サンプリング値作成において，dt毎の測定対象の出力データ$c(t)$から，サンプリング周期毎のデータを抜き出すことによって，出力信号$y(n)$を作成する．

最後に，TSP応答計算で重要なのは測定対象のモデル化である．もともと本シミュレーションの目的はサーボモータ速度制御系に含まれる正弦波ノイズや非線形性の検討であるが，実際の制御系を精度高くモデル化することは簡単でない．また，今後は実際の測定実験との比較も考えている．以上のことから，理論的な伝達関数が求めやすい測定対象として，以前実験に使用したことのある４次バターワースLPFを採用した．さらにこのLPFに正弦波ノイズや非線形性を与える実験は比較的簡単に行える見込みである．

以下に測定対象のモデルを詳細に説明する．

⑴測定対象のブロック線図

測定対象の時間応答のシミュレーションは時間領域の計算だから，時間tを変数とする数式モデルが必要である．一方，正弦波ノイズや非線形性を追加するには，モデルをブロック線図で表しておく方が分かりやすい．これらのことから制御対象全体をブロック線図で表し，ラプラス変数sの数式で表されたバターワースLPFを，時間領域の計算ができるブロック線図で表すことにした．以下には項目に分けて内容を説明する．

先ず，４次バターワースLPFの伝達関数$G_{B4}(s)$は次式で表される[3)]．

$$G_{B4}(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^4+2.613\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^3+3.414\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2+2.613\frac{s}{\omega_c}+1} \quad (1)$$

ただし，$\omega_c$はフィルタの遮断角周波数である．

この式を基準にして，正弦波ノイズと非線形性を追加したモデルを図２のブロック線図のように構成した．図の非線形要素を１(線形)として，全体の伝達関数が(1)式と同じになるように積分要素と多次遅れM(s)の係数を決める．積分要素を入れたのは，(1)式が定常偏差０の制御系になっているのを実現するためである．正弦波ノイズはフィードバックループの出側で正弦波信号d(t)を加算することで表す．非線形要素はいろいろの種類があるが，当面の想定であるサーボモータの加速トルクと減速トルクの違いは，図のように表現できる．

(2)バターワースLPFのブロック線図

非線形要素の入っていない４次バターワースLPFのモデルについて説明する．図２のブロック線図から非線形要素と正弦波ノイズを除いた上で，多次遅れM(s)を図３のように３次で表す．すると全体は４次遅れになり，その伝達関数$G_4(s)$は次式のようになる．

$$G_4(s)=\frac{1}{\frac{T_1T_2T_3}{K}s^4+\frac{T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1}{K}s^3+\frac{T_1+T_2+T_3}{K}s^2+\frac{s}{K}+1} \quad (2)$$

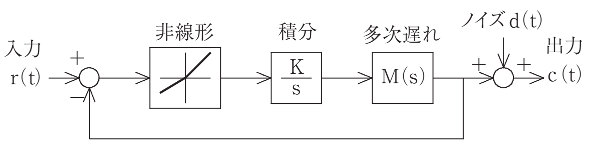


図２　測定対象のブロック線図

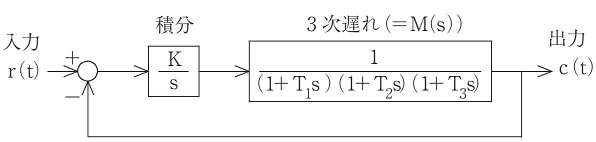


図３　４次遅れのブロック線図

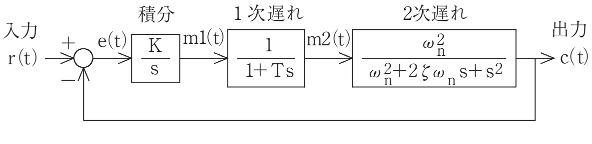


図４　４次バターワースLPFのブロック線図

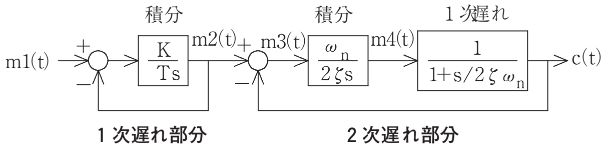


図５　1,2次遅れ標準形のブロック線図

(1)式と(2)式の係数を比較した連立方程式を解くと，係数Kおよび$T_1$～$T_3$は次の値になる．

$$K\fallingdotseq\frac{\omega_c}{2.613},\ T_1\fallingdotseq\frac{0.6674}{\omega_c},\ T_2,T_3\fallingdotseq\frac{0.3196\pm j0.6865}{\omega_c} \quad (3)$$

このうち，$T_2$と$T_3$は(共役)複素数のため，そのままの形では１次遅れ要素として計算できない．そこで，$T_2$と$T_3$を合わせて２次遅れ標準式を用いて図４のように表す．そのパラメータ$\omega_n$(固有角周波数)と$\zeta$(減衰係数)は，図３と図４の係数を比較した連立方程式を解いて求めることができる．結局，図４のパラメータの値は次のようになる．

$$K\fallingdotseq 0.3827\omega_c,\quad T\fallingdotseq 0.6674/\omega_c,$$
$$\omega_n=1/\sqrt{T_2T_3}\fallingdotseq 1.321\omega_c$$
$$\zeta=(T_2+T_3)/2\sqrt{T_2T_3}\fallingdotseq 0.4221$$

(3)ブロック線図のシミュレーション計算

図４に基づきTSP入力に対する各部の時間的応答(変化)を，時間刻み幅dt毎に，逐次計算する．図５には，図４の１次遅れ，２次遅れ部分を詳細に示した．

①積分　一番簡単な次の積算の式を用いる．

$$m1_i=m1_{i-1}+K\cdot e_i\cdot dt \quad (4)$$

ただし，$m1_i$，$e_i$はそれぞれm1(t)，e(t)の逐次計算値を表す．(以下同様)

②１次遅れ　図５のように積分１つを含むフィードバックループで表される．計算では，１次遅れのステップ応答の解析解に基づき，次式を用いる．

$$m2_{i+1}=m2_i+(1-\exp(-dt/T))(m1_i-m2_i)$$
$$=m1_i+(m2_i-m1_i)\exp(-dt/T) \quad (5)$$

③２次遅れ　積分と１次遅れ要素を組み合わせて，図５のように表して②と同様に計算する．

## ３．シミュレーションの計算例

(1)プログラム

前章で説明した方法に従って，数式処理ソフトウェアMathcad(Mathsoft社製)を用いてプログラムを作成し，プログラムリストを付録に載せた．その詳細はリストのコメント欄を参照して欲しい．なお，TSP信号作成と周波数応答解析は当該文献のプログラムの上に一部を書き加えた．TSP応答計算は新しく追加した．このプログラムによる計算結果のグラフは後述の計算例で示す．

(2)バターワースLPFの計算精度

プログラムの計算精度で気になるのはバターワース

表１ 正弦波入力に対する出力振幅の計算精度

| 入力：r(t)＝sin(aωct)，aは高調波の係数 | | | |
|---|---|---|---|
| 出力の計算結果 | | | |
| a | 応答計算 | 伝達関数 | 相対差(dB換算値) |
| 0.1 | 1.0000 | 1.0000 | 0　 %(0　dB) |
| 0.5 | 0.99882 | 0.99809 | 0.073 (0.006) |
| 1.0 | 0.71531 | 0.70721 | 1.145 (0.099) |
| 2.0 | 0.06266 | 0.06238 | 0.449 (0.039) |
| 10 | $1.0000\times10^{-4}$ | $1.0014\times10^{-4}$ | 0.14　(0.012) |

LPFの応答計算である．そこで，これに正弦波sin($a\omega_c t$)を入力し，定常状態になったときの出力の振幅を読み取って，(1)式の伝達関数から計算される振幅の理論値と比較した．その結果を表１に示すが，誤差が一番大きいａ＝１の時で，相対誤差は1.15%であり，シミュレーションの計算精度として十分であるといえる．なお，この小さな誤差の原因は，ブロック線図のパラメータを近似したことや，時間刻み幅の影響等が考えられる．なお，他の計算条件は後述の計算例と同じである．

(3)TSP法を用いた周波数応答測定

プログラム全体を計算して，バターワースLPFの周波数特性測定をシミュレートした結果を図６に示す．図の計算条件は付録のプログラムリストに載っているが，主なものは次の通りである．TSPに関してはデータ(標本)数Ｎ＝4096，TSPの時間引き延ばし係数ｍ＝700，シフト個数rot＝2000，サンプリング周期ts＝0.01 sである．バターワースLPFに関しては， 遮断周波数fc＝1Hz($\omega_c=2\pi f_c$)，時間刻み幅dt＝0.005sである．

図６の周波数特性のグラフは測定値と合わせて，バターワースLPFの伝達関数から計算した理論値をプロットしているが，当然のことながら両者は良く一致していると言える．なお，周波数が10Hzより大きくなると，位相特性において理論値と測定値の間に少しの差異が見られる．しかし，この領域ではゲインが-80dBより小さくなっているので，関心の対象外になることを考えると，実用上は特に大きな差ではないといえる．

なお，いろいろな計算条件でシミュレートした結果次の知見が得られた．先ずTSP信号の右側の信号レベルがほぼ0である期間が短いと，TSPの応答が十分に収まる前に計算が終了する．その結果，高い周波数領域の測定精度が低下するので，測定方法に工夫が必要である．さらに，サンプリング周期に比べて応答計算の刻み時間幅が小さいと，位相特性の高周波領域で理論値と測定値の差が大きくなる．これはシミュレーションモデルでもアンチエイリアスフィルタの挿入が必要なことを示唆している．

以上結論として，ここで説明したシミュレータを用いて，TSP法を用いた周波数応答測定を検討できる目処が立ったといえる．

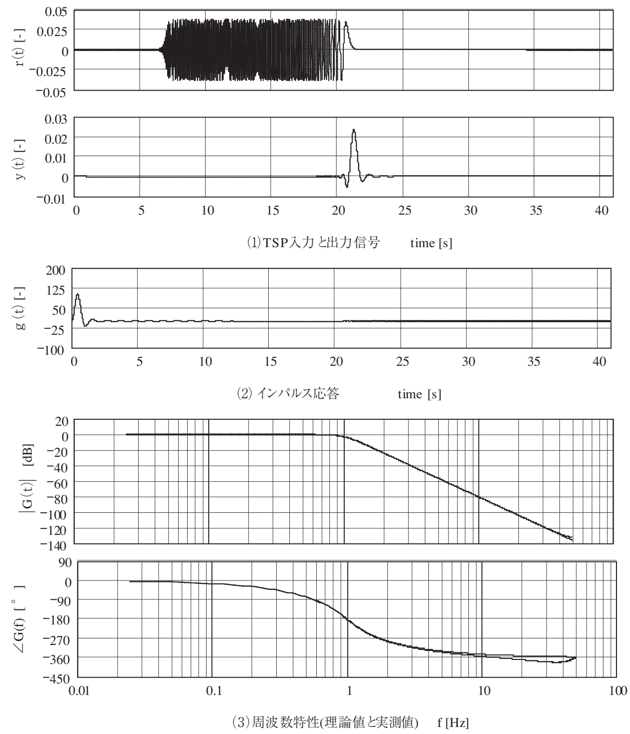


図６ バターワースLPFの周波数特性測定例

## ４．あとがき

TSP法を用いて実際の制御システムの周波数特性を測定する場合に，そのシステムに含まれる正弦波ノイズや非線形性が測定精度を悪化させる原因になる．この正弦波ノイズや非線形性の測定精度への悪影響を調べ，その改善方法を検討するためのシミュレーションモデルを作成した．測定対象の制御システムを４次バターワースLPFとして，シミュレーションモデルとプログラムの内容について詳しく説明し，作成したプログラムのリストを添付した．さらにこのシミュレーションプログラムを用いた計算例を示したが，今後の検討に使用できるモデルが作成できたことが分かった．

## 参考文献

1）近藤勝也，“TSPを用いた線形システムの周波数特性測定に関する調査”奈良高専研究紀要，39号，pp.73-78(2003).

2）近藤勝也，中坊典史，杉本真崇，“TSPを用いたサーボモータ速度制御系の周波数特性測定”，奈良高専研究紀要，41号，pp.79-84(2005).

3）中村尚五，“ビギナーズデジタルフィルタ”，東京電機大学出版局，pp.88(1989).

## 付　録

# シミュレーションプログラム

## 《1. TSP信号処理》

### 1-(1). TSPの計算

$N := 4096 \quad m := 700$

$\alpha := 4 \cdot m \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^2 \qquad \alpha = 5.2431 \times 10^{-4}$

$k := 0 .. \frac{N}{2} \qquad H_k := e^{\alpha \cdot k^2 \cdot j}$

$k := \frac{N}{2} + 1 .. N - 1 \qquad H_k := e^{-\alpha \cdot (N-k)^2 \cdot j}$

$k := 0 .. N - 1 \qquad H\theta_k := \arg(H_k)$

$h := \frac{1}{N} \cdot ICFFT(H)$

$n := 0 .. N - 1 \qquad hR_n := Re(h_n) \qquad hI_n := Im(h_n)$

［計算条件－記号の説明］
N：データ数(標本数)　m：TSPの時間引き延ばし係数
k：周波数の変数(データ番号)　n：時間の変数(同左)
「=」は変数の値を見る(出力する)ためのプログラム記号

［TSP計算式－式の説明］(変数を示す添え字は省略)
H：TSPの周波数領域データ(複素数)　Hθ：Hの偏角
h：Hの逆DFT(複素数)
hR：hの実数部　hI：hの虚数部

［DFT計算式の説明］
組込関数の計算式はCFFTで1/Nが掛かるが，直接周波数を計算した今回はICFFTの時にそれを掛ける．

### 1-(2). 円状シフト

$rot := 2000$

$n := 0 .. N - 1 - rot \qquad hr_n := h_{n+rot}$

$n := N - rot .. N - 1 \qquad hr_n := h_{n-(N-rot)}$

$n := 0 .. N - 1 \qquad hrR_n := Re(hr_n) \qquad hrI_n := Im(hr_n)$

［計算条件，記号の説明］
rot：円状シフトのデータ数(左方向=時間進めシフト)
hr：円状シフト後の(実際に使う)TSP
hrR，hrI：hrの実数部と虚数部

### 1-(3). 逆フィルタ

$Hr := N \cdot CFFT(hr)$

$k := 0 .. N - 1$

$Fr_k := \overline{Hr_k} \qquad Fr\theta_k := \arg(Fr_k)$

$fr := \frac{1}{N} \cdot ICFFT(Fr)$

$n := 0 .. N - 1$

$frR_n := Re(fr_n) \qquad frI_n := Im(fr_n)$

［計算条件，記号の説明］
Hr：hrのDFT
Fr：Hrの逆フィルタの周波数関数(Hrの共役)
Frθ：Frの偏角，　fr：Frの逆DFT(複素数)
frR，frI：frの実数部と虚数部

## 《2. TSP応答計算》

### 2-(1).計算条件設定

$dt := 0.005 \qquad fc := 1 \qquad \omega c := 2 \cdot \pi \cdot fc$

$K := \frac{\omega c}{2.613} \qquad T := \frac{0.6674}{\omega c}$

$\omega n := 1.321 \cdot \omega c \qquad \zeta := 0.4221$

［記号の説明］
dt:時間刻み幅[s]
応答計算終了時間Lt[s]と応答計算の
繰り返し回数Ntは2-(2)で決定．
(Lt＝TSPのサンプリング周期×標本数とする)
fc:バターワースフィルタの遮断周波数[Hz]
ωc:同上遮断各週端数[rad/s]
K:積分の係数　T:1次遅れの係数
ωn：2次遅れの係数(固有角周波数)[rad/s]
ζ:　同 上 (減衰係数)

### 2-(2).入力信号作成

$ts := 0.01$

$dNs := \frac{ts}{dt} \qquad Lt := N \cdot ts \qquad Nt := \frac{Lt}{dt}$

$ns := 0 .. N - 1$

$it := 0 .. dNs - 1$

$r_{ns \cdot dNs + it} := hrR_{ns}$

ts:TSPのサンプリング周期[s]
dNs:サンプリング周期(ts)の時間刻み計算数
ns:サンプリング順番変数
(N:TSPのサンプリング総数)
it:シミュレーション時間の変数(設定用)
r:バターワースフィルタの入力
hrR:TSPのサンプリング信号

2-(3).4次バターワースLPF

$$F := \left| \begin{array}{l} cc \leftarrow 0 \\ m1_0 \leftarrow 0 \\ m2_0 \leftarrow 0 \\ m4_0 \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..Nt-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} e_i \leftarrow r_i - cc \\ m1_i \leftarrow m1_{i-1} + K \cdot e_i \cdot dt \\ m2_i \leftarrow m1_{i-1} + \left(m2_{i-1} - m1_{i-1}\right) \cdot \exp\left(\frac{-dt}{T}\right) \\ m3_i \leftarrow m2_i - cc \\ m4_i \leftarrow m4_{i-1} + \frac{\omega n}{2 \cdot \zeta} \cdot m3_i \cdot dt \\ c_i \leftarrow m4_{i-1} + \left(cc - m4_{i-1}\right) \cdot \exp\left(-2 \cdot \zeta \cdot \omega n \cdot dt\right) \\ cc \leftarrow c_i \end{array} \right. \\ (c \ \ cc) \end{array} \right.$$

$$(c \ \ cc) := F$$

［記号の説明］
cc:cの置きかえ．初期値(=0)が必要なため
他の変数はブロック線図と同じ

最後の(・・・・・)$^{-1}$はプログラム内変数を外部で使用できるようにするための書式．

2-(4)出力信号（サンプリング値）作成

$ns := 0..N-1$ $\quad y_{ns} := c_{dNs \cdot ns}$ $\quad t_{ns} := ts \cdot ns$

［記号の説明］
ns:サンプリング順番変数
dNs:サンプリング周期(ts)の時間刻み計算数
(N:TSPのサンプリング総数)
y:測定対象からの出力
c:バターワースフィルタの出力

《3．周波数応答解析》

<畳み込み>

$Y := \mathrm{CFFT}(y)$

$k := 0..N-1$ $\quad G_k := N \cdot Y_k \cdot Fr_k$ $\quad g := \mathrm{ICFFT}(G)$ $\quad f_k := \frac{k}{Lt}$

$n := 0..N-1$ $\quad gR_n := \mathrm{Re}(g_n)$ $\quad gI_n := \mathrm{Im}(g_n)$

$kp := 0..\frac{N}{2} - 1$

$Ga_{kp} := \left|G_{kp}\right|$ $\quad Gdb_{kp} := 20 \cdot \log\left(Ga_{kp}\right)$ $\quad G\theta_{kp} := \arg\left(G_{kp}\right)$

$$FF := \left| \begin{array}{l} \text{for } kk \in 0..\frac{N}{2}-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} G\phi_{kk} \leftarrow \frac{180}{\pi} \cdot G\theta_{kk} \\ G\phi_{kk} \leftarrow G\phi_{kk} - 360 \ \text{ if } \left(G\phi_{kk} > 0\right) \vee \left(\frac{kk}{Lt} > 2 \cdot fc\right) \end{array} \right. \\ (G\phi \ \ G\phi) \end{array} \right.$$

$$(G\phi \ \ G\phi) := FF$$

［計算条件，記号の説明］
Fr：逆フィルタfrのDFT
Y：出力yのDFT
G：HrとFrの円状畳込み=周波数応答
元の大きさに戻すため，Nを掛ける．
g：GのIDFT=インパルス応答．
gR,gI：gの実数部と虚数部
Ga,Gθ：Gの振幅と位相
f：Gの周波数変数[Hz]
Gdb：Gaのデシベル表示[dB]
Gϕ：Gθの角度表示[° ]＜-πに拡張
kp:プロット用周波数変数(1/2ts[Hz]迄)

B：ﾊﾞﾀｰﾜｰｽﾌｨﾙﾀ伝達関数の理論値
ｹﾞｲﾝ<0.01dBを強制的に0(ﾊﾞﾀﾂｷ防止)

<バターワースLPFの理論値>

$s_{kp} := j \cdot \frac{f_{kp}}{fc}$ $\quad B_{kp} := \frac{1}{\left(s_{kp}\right)^4 + 2.613 \cdot \left(s_{kp}\right)^3 + 3.414 \cdot \left(s_{kp}\right)^2 + 2.613 \cdot s_{kp} + 1}$

$Ba_{kp} := \left|B_{kp}\right|$

$Bdb_{kp} := 20 \cdot \log\left(Ba_{kp}\right)$

$B\theta_{kp} := \arg\left(B_{kp}\right)$

$$FE := \left| \begin{array}{l} \text{for } kk \in 0..\frac{N}{2}-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} B\phi_{kk} \leftarrow \frac{180}{\pi} \cdot B\theta_{kk} \\ B\phi_{kk} \leftarrow B\phi_{kk} - 360 \ \text{ if } \left(B\phi_{kk} > 0\right) \vee \left(\frac{kk}{Lt} > 2 \cdot fc\right) \\ Bdb_{kk} \leftarrow 0 \ \text{ if } \left|Bdb_{kk}\right| \le 0.01 \end{array} \right. \\ (B\phi \ \ Bdb) \end{array} \right.$$

$$(B\phi \ \ Bdb) := FE$$