結び目とそのスパン結び目　Ⅱ

安田　智之

Knots and their spun knots Ⅱ

Tomoyuki YASUDA

二つの二次元球面にひとつの二次元円環領域を繋げて得られる二次元リボン結び目のことを２ベース二次元リボン結び目というが、[1] において初めて二種類以上の２ベースリボン表示を持つ二次元リボン結び目の任意有限個存在することが証明されている。一方、ひとつの二次元リボン結び目のリボン表示が与えられた時、二次元円環領域が二次元球面と交差する回数のことを、そのリボン表示のリボン交差数というが、[1] で構成された結び目のリボン表示うち交差数が最小のものは 5_2結び目の二種類の６交差リボン表示であった。その後この二種類のリボン表示は安定同値であることが、[2] の主定理によって示されるのだが、その具体的な変形の過程についてはまだ知られていなかった。本論文ではまずそれを示す。そして系として、まだ知られていなかった 5_2結び目の最小交差数の決定ほか、二つの結果を示す。

１．緒　　論

二次元リボン結び目とは四次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R^4}$ においてｍ個の二次元球面をｍ－1個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成される二次元球面である。二次元リボン結び目 K^2を構成するための球面と円環領域との対のことを K^2のリボン表示といい、ｍ個の球面とｍ－1個の円環領域の対で表される K^2のリボン表示のことを K^2のｍベースリボン表示という。また、K^2の総てのリボン表示を考えたとき、それらのベース数のうち、最小の数のことを K^2のベース数といい $b(K^2)$で表す。そして $b(K^2)$がｍであれば K^2はｍベース二次元リボン結び目であるという。一方、二次元リボン結び目 K^2のリボン表示 R において、これを構成する円環領域が球面と交差する回数のことを R のリボン交差数といって、$cr(R)$ で表す。また、K^2のすべてのリボン表示を考えたとき、それらのリボン交差数のうち、最小の数のことを K^2の交差数といい、$cr(K^2)$で表す。

[1] においては、2ベース二次元リボン結び目でさえ、二つの異なる種類のリボン表示を持つことが示された。即ち二つの二次元球面に対し、ひとつの円環領域を本質的に異なる二つの方法で繋げても同じ二次元リボン結び目が得られる例のあることが示されたのである。ところで、ここで構成されたリボン結び目のリボン表示のうち、リボン交差数が最小のものは 5_2結び目のスパン結び目 *spun*（5_2）についての二種類の６交差リボン表示であった。この二種類のリボン表示は安定同値であることが、その後 [2] の主定理によって示されるのだが、その具体的な変形の過程についてはまだ知られていなかった。本論文ではそれを示す。また、結果として、まだ知られていなかった *spun*（5_2）の最小交差数が決定される。その他ふたつの系が得られる。

２．準　　備

１．１　定義（[3]）

$\{ D^3_\mu \mid \mu = 1, 2, \cdots, m \}$ を互いに交わらない四次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R^4}$ 内の三次元球体の族とする。また、$\partial D^3_\mu = O^2_\mu$ とおく。

一方、$f^r_{i_r j_r} : D^2 \times I \rightarrow \boldsymbol{R^4}$
($r = 1, 2, \cdots, m-1$; $i_r, j_r = 1, 2, \cdots, m$)を、像が互いに交わらない埋め込みの族とし、かつ、次の性質（１）、（２）を満たすものとする。但し D^2は二次元球体、$I = [0, 1]$ である。

$$(1)\ f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I) \cap O^2_\mu = \begin{cases} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \{0\}) & (i_r = \mu) \\ f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \{1\}) & (j_r = \mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$$

(2) $(\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2\times I))\cup(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu)$ は連結。

ここで K^2を二次元球面
$(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu)\cup(\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(\partial D^2\times I)) - \mathring{T}$ とする。但し
$T=\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2\times\partial I)$であり$\mathring{T}$はTの内部を表す。この時、$K^2$のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

1．2　定義（[3]）

$\mathcal{O}=\bigcup_{\mu=1}^{m} D^3_\mu$, $\mathcal{B}=\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2\times I)$ とおくとき（$\mathcal{O}$，$\mathcal{B}$）のことを二次元リボン結び目K^2に対するmベースリボン表示(或いは単にリボン表示)と呼ぶ。また$\mathcal{O}$をベース、$\mathcal{B}$をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目K^2に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことをK^2のベース指数と呼び$b(K^2)$で表す。このときK^2は$b(K^2)$ベース二次元リボン結び目であるという。

1．3　定義　（[3]）

$\ell_r = f^r_{i_r j_r}(\{0\}\times I)$（$r=1, 2, \cdots, m-1$）とおく。但し、{0}は$D^2$の中心点である。ここで各$\ell_r$が$\mathcal{O}$に有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各ℓ_rの方向に従ってa_{r1}, a_{r2}, …, a_{rs_r}とし（$\mathcal{O}$，$\mathcal{B}$）のリボン交差と呼ぶ。但し各ℓ_rの方向はO^2_iからO^2_jへ向かう方向とする。この時$n=\sum_{r=1}^{m-1} s_r$をリボン表示のリボン交差数と呼び、（$\mathcal{O}$，$\mathcal{B}$）はn交差リボン表示であるという。そうしてK^2に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことをK^2の最小交差数(或いは単に交差数)と呼び$cr(K^2)$で表す。

1．4　定義

a_{r1}, a_{r2}, …, a_{rs_r}に対応して、s_r個の文字からなる語w_rをつくる。つくり方はℓ_rがD^3_μに点a_{rv}（$v=1, 2, \cdots, s_r$）で正の側から交わるとき、w_rのv番目の文字をx_μ、負の側から交わるときは同様x_μ^{-1}とするものとする。このようにしてつくられた語w_1, w_2, …, w_{m-1}を利用してK^2の結び目群$\pi_1(\boldsymbol{R}^4 - K^2)$の群表示を次の様に構成できる。

（*1）　$[\,x_\mu;\ \mu=1, 2, \cdots, m \mid x_i w_r x_j^{-1} w_r^{-1};\ r=1, 2, \cdots, m-1\,]$

但し各x_μはO^2_μのメリディアン生成元とする([4])。以上の様な構成法でリボン表示（$\mathcal{O}$，$\mathcal{B}$）から得られた群表示(*1)のことを（$\mathcal{O}$，$\mathcal{B}$）に関連したリボン群表示と呼ぶ。また各w_rのことをこのリボン表示の語と呼ぶ。一方、リボン群表示（*1）からは、逆の手順でリボン表示（$\mathcal{O}$，$\mathcal{B}$）を定められるので（$\mathcal{O}$，$\mathcal{B}$）のことをリボン群表示（*1）に関連したリボン表示と呼ぶ。

1．5　定義（[1]）

二つの2ベース二次元リボン結び目K^2_{I}、K^2_{II}に対し（$\mathcal{O}_{I}$，$\mathcal{B}_{II}$）、（$\mathcal{O}_{I}$，$\mathcal{B}_{II}$）がそれぞれのリボン表示であるとする。このとき、二つのリボン表示が同じリボン型であるとは、ある、$\boldsymbol{R}^4$から$\boldsymbol{R}^4$への向き付けを保つ同相写像 h があって、
$h(K^2_{I}) = K^2_{II}$ かつ　$h(\mathcal{B}_{I}) = \mathcal{B}_{II}$
が成立することをいう。

1．6　定義

$\boldsymbol{R}^3_+$を$\boldsymbol{R}^4$内において$x_4=0$, $x_3 \geqq 0$によって定義される$\boldsymbol{R}^3$の上半空間とし、$\boldsymbol{R}^3_-$を$\boldsymbol{R}^4$内において$x_4=0$, $x_3 \leqq 0$によって定義される$\boldsymbol{R}^3$の下半空間とする。ここで$\boldsymbol{R}^3_+$を方程式$x'_1=x_1$, $x'_2=x_2$, $x'_3=x_3\cos\theta$, $x'_4=x_3\sin\theta$に従って回転させる。この時$\boldsymbol{R}^2$を$x_3=x_4=0$と定めれば$\boldsymbol{R}^3_+$は$\boldsymbol{R}^2$について回転することになる。今、$\boldsymbol{R}^3$内の一次元結び目k^1を$k^1\cap\boldsymbol{R}^3_-$がプロパーに埋め込まれた自明な弧であるように置いておく。この時、$k^1\cap\boldsymbol{R}^3_+$を上述の回転の方程式に従って回転させた時に構成される二次元結び目をk^1のスパン結び目と呼び、$spun(k^1)$で表す([5], [6], [7])。

3．結　果

R_1とR_2をそれぞれ次のリボン群表示G_1とG_2に関連したリボン表示とする。これらは[1]で構成された$spun(5_2)$の異なる二つのリボン型である。

$G_1 = [\,x_1, x_2 \mid x_1 w_1 x_2^{-1} w_1^{-1}\,]$,

$G_2 = [\,x_1, x_2 \mid x_1 w_1 x_2^{-1} w_1^{-1}\,]$

但し、$w_1 = x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}$,

$w_2 = x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1^{-1}$ とする。

このとき次の命題が成立する。

2．1　命題

二次元リボン結び目$spun(5_2)$の異なる二つのリボン型R_1とR_2は安定同値である。

（証明）R_0を次のリボン群表示G_0に関連したリボン表示とする。

$G_0 = [\,x_1, x_2, x_3 \mid x_1 w_1 x_2^{-1} w_1^{-1},\ x_1 w_2 x_3^{-1} w_2^{-1}\,]$

但し、$w_1 = x_3^{-1}x_1x_3^{-1}$，$w_2 = x_2$とする。また、$b_1$と$b_2$をそれぞれ$w_1$と$w_2$に対応するバンドとする。

まず、R_0 と R_1 が安定同値であることを示す。b_1をb_2へ通す安定同値変形を用いてR_0をR_{12}に変形する。R_{12}は次のリボン群表示に関連したリボン表示である。

$$G_{12} = [\ x_1,\ x_2,\ x_3 \mid\ x_1w_{12}x_2^{-1}w_{12}^{-1},\ x_1w_2x_3^{-1}w_2^{-1}\ ]$$

但し、$w_{12} = x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2$とする。この語の最後の文字$x_2$に対応するリボン交差を解消する安定同値変形を行った後、バンドb_2とそれにつながるx_3に対応するベースを消滅させる安定同値変形を行うと、R_1が実現される。

次に、R_0 と R_2 が安定同値であることを示す。b_2をb_1へ通す安定同値変形を用いてR_0 を R_{21} に変形する。R_{21} は次のリボン群表示に関連したリボン表示である。

$$G_{21} = [\ x_1,\ x_2,\ x_3 \mid\ x_1w_1x_2^{-1}w_1^{-1},\ x_1w_{21}x_3^{-1}w_{12}^{-1}\ ]$$

但し、$w_{21} = x_3x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3^{-1}$とする。この語の最後の文字$x_3^{-1}$に対応するリボン交差を解消する安定同値変形を行った後、バンドb_1とそれにつながるx_2に対応するベースを消滅させる安定同値変形を行うと、R_2が実現される。　　（証了）

［3］において最小交差数が3以下の二次元リボン結び目は完全に決定されたが、その中にはアレキサンダー多項式が　$-2+3t-2t^2 \pmod{\pm t^{\alpha}}$　であるものはない。ところが、これは *spun*（5_2）のそれであるので *spun*（5_2）の最小交差数は4以上である。一方、*spun*（5_2）はリボン交差数4のリボン表示R_0をもつことが、命題2．1から分かったので、次の命題が成り立つ。

2．2　系

$$\mathrm{cr}(\ spun(5_2)\ ) = 4\ .$$

[2]、[3]、[8] において結び目の最小交点数と二次元リボン結び目の最小交差数、及び結び目の橋指数と二次元リボン結び目のベース数の観点から、結び目と二次元リボン結び目との類似を考えてきたが、それを纏めると次のようになる。

結び目における（ア）m 橋表示　と（イ）n 交点表示　は、二次元リボン結び目の　（あ）m ベースリボン表示　と　（い）n 交差リボン表示　にそれぞれ対応する。

一方、（ア）と（イ）に関しては、[9, Sec.13] により、「任意の二橋結び目は二橋交代表示が最小交点数を実現する」という結果が示されている。しかし、2．2系の結果からは次のことが分かる。

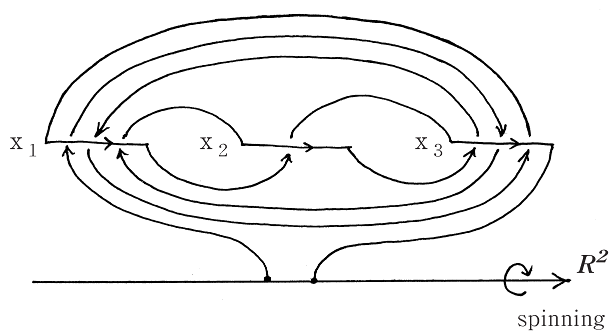
2．3　系

3ベースリボン表示が最小交差数を実現するような2ベース二次元リボン結び目が存在する。

下図に示したような、5_2結び目の三橋表示から十分小さい部分を除いた弧を、定義1．6に従って $\boldsymbol{R^4}$ 内で $\boldsymbol{R^2}$ について回転することによって構成される3ベースリボン表示をR'_0とする。[8, Sec.4] と同じ構成法を用いて、R'_0はR_0から3回の「ベースにベースを通す」安定同値変形と、2回の「ベースを消滅させる」安定同値変形を施すことによって得られる。従って次の系が得られる。

2．4　系

適当な二橋結び目 k^1 に対しては、k^1 のある三橋表示から十分小さい部分を除いて得られる弧を $\boldsymbol{R^4}$ 内で $\boldsymbol{R^2}$ について回転することによって構成される3ベースリボン表示が *spun*（k^1）の最小交差数を実現する。



図：5_2結び目の三橋表示から
十分小さい部分を除いた弧

参考文献

[1] Yasuda，T.，Ribbon knots with two ribbon types，*J. Knot Theory Ramifications* **1** (1992)，477-482.

[2] Marumoto，Y.，Stably equivalence of ribbon presentations，*J. Knot Theory Ramifications* **1** (1992)，241-251.

[3] Yasuda，T.，Crossing and base numbers of ribbon 2-knots，*J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001)，999-1003.

[4] Yajima，T.，On characterization of knot groups of some spheres in R^4，*Osaka J. Math*. **6** (1969)，435-446.

[5] Suzuki,S.，Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere，*Math. Sem. Notes Kobe Univ*. **4** (1976)，241-371.

[6] Andrews，J.J.; Curtis，M.L.，Knotted 2-spheres in the 4-sphere，*Ann. of Math*. **70** (1959)，565-571.

[7] Kanenobu，T.; Marumoto，Y.，Unknotting and fusion numbers of ribbon 2-knots，*Osaka J.Math*. **34** (1997)，525-540.

[8] Yasuda，T.，An evaluation of the crossing number on ribbon 2-knots，*J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006)，1- 9.

[9] Murasugi，K.，On invariants of graphs with Applications to knot theory，*Trans. Amer. Math. Soc*. **314** (1989)，1-49.