半擬補分配束のシーケントによる形式化

荒金　憲一

Sequential formulations for demi-pseudocomplemented distributive lattices

Kenichi ARAGANE

最小元0と最大元1をもつ分配束(bounded distributive lattice(BDL)：$F1$～$F7°$を満たす)で3重否定律($F8$, $F8°$つまり$x'''=x'$)と半ド・モルガン律($F9$, $F9°$)と半矛盾律($F11$)と0, 1についての性質($F10$, $F10°$)を満たす代数系が [7], [8], [9] で定義されている半擬補分配束(demi-pseudocomplemented distributive lattice(DPL)：[2] の$\mathbb{MP}\widetilde{\mathbb{P}}$と$\mathbb{MP}$の間にある)である．つまり, [4]での半ド・モルガン代数(SDMA)に$F11$を付け加えたものが半擬補分配束である．本論文では, 半擬補分配束で成り立つ性質を調べる．そして半擬補分配束と演繹的に同値な，G. Gentzen の方法([6])でのシーケント(式)による形式的体系 GDPL を考える．

§1　ワード

[3], [4], [5] と同様にワードを定義する.

[定義1]　(ワードの定義)

(1)　定数 0, 1 はワードである.

(2)　変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ はワードである.

(3)　x と y がワードのとき $x \wedge y$, $x \vee y$, x' はワードである.

(4)　以上の (1), (2), (3) によって構成された記号列のみがワードである.

ワード全体の集合を A とし, 2項演算 $\vee, \wedge$ と1項演算 $'$ をもつ代数系 $\mathbf{A} = (A; 0,\ 1,\ \vee,\ \wedge,\ ')$ を考える.

§2　半擬補分配束 (DPL)

[定義2]　(DPL の定義)

A の任意の元 x, y, z に対して, 次の $F1 \sim F11$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{A}$ を半擬補分配束 (DPL) とよぶ ([7], [8], [9]).

$F1$	$x \wedge 0 = 0$	$F1°$	$x \vee 1 = 1$
$F2$	$x \wedge 1 = x$	$F2°$	$x \vee 0 = x$
$F3$	$x \wedge x = x$	$F3°$	$x \vee x = x$
$F4$	$x \wedge y = y \wedge x$	$F4°$	$x \vee y = y \vee x$
$F5$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$F5°$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$F6$	$x \wedge (x \vee y) = x$	$F6°$	$x \vee (x \wedge y) = x$
$F7$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$F7°$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$F8$	$x' \wedge x''' = x'$	$F8°$	$x' \vee x''' = x'$
$F9$	$(x \wedge y)'' = x'' \wedge y''$	$F9°$	$(x \vee y)' = x' \wedge y'$
$F10$	$0' = 1$	$F10°$	$1' = 0$
$F11$	$x' \wedge x'' = 0$		

[定義 3] (不等式の定義)
x, y を A の任意の元とする. $x \wedge y = x$ が成り立つとき, $x \leq y$ と書く.

[1], [3], [4], [5] と同様にして, 次の定理が成り立つ.

[定理 1] 代数系 $\mathbf{A}$ が 半擬補分配束 (DPL) であり (つまり $F1$〜$F11$ が成り立つ), かつ定義 3 により $x \leq y$ が定義される $\Longleftrightarrow$ A の任意の元 x, y, z に対して $\mathbf{A}$ で次の $T1 \sim T13$ が成り立つ.

$T1$	$x \leq x$		
$T2$	$x \leq y,\ y \leq x \Longleftrightarrow x = y$		
$T3$	$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$		
$T4$	$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$		
$T5$	$0 \leq x$	$T5°$	$x \leq 1$
$T6$	$x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y$	$T6°$	$x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y$
$T7$	$z \leq x,\ z \leq y \Longrightarrow z \leq x \wedge y$	$T7°$	$x \leq z,\ y \leq z \Longrightarrow x \vee y \leq z$
$T8$	$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$T8°$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$
$T9$	$x \leq y \Longrightarrow y' \leq x'$	$T9°$	$x'' \leq y'' \Longleftrightarrow y' \leq x'$
$T10$	$x' \leq x'''$	$T10°$	$x''' \leq x'$
$T11$	$x'' \wedge y'' \leq (x \wedge y)''$	$T11°$	$x' \wedge y' \leq (x \vee y)'$
$T12$	$1' \leq x$	$T12°$	$x \leq 0'$
$T13$	$x' \wedge x'' \leq 0$		

(証明)
$\Longrightarrow$: $T1$〜$T12°$ は [4] の定理 1 の証明と同じである.
$T13$: $F11$ と $T2$ から成り立つ.
$\Longleftarrow$: 定義 3 により $x \leq y$ が定義されることと $F1$〜$F10°$ は [4] の定理 1 の証明と同じである.
$F11$: $T5, T13$ と $T2$ により成り立つ. (証明終)

[3], [4], [5] と同様に, $\wedge$ と $\vee$ に関する単調性が成り立つ.

[注意 1] 束において, 次の (1), (2) が成り立つ.
(1) $x \leq y, u \leq v \Longrightarrow x \wedge u \leq y \wedge v$ ($\wedge$ の単調性)
(2) $x \leq y, u \leq v \Longrightarrow x \vee u \leq y \vee v$ ($\vee$ の単調性)

[4], [5], [7], [8]. [9] と同様にして, 次の性質が成り立つ.

[注意 2] 半擬補分配束 (DPL) において, 次のことが成り立つ.
(1) $x'' \wedge (x \wedge y)' = x'' \wedge y'$
(2) $x''' = x'$
(3) $x \wedge y = 0 \Longrightarrow x'' \leq y'$
(4) $x \leq y' \Longrightarrow x \wedge y'' = 0$
(5) $x \leq y' \Longrightarrow x'' \leq y'$
(6) $(x \vee y)'' = (x' \wedge y')' = (x'' \vee y'')''$
(7) $(x \wedge y)' = (x'' \wedge y'')' = (x' \vee y')''$
(8) $(x \vee y)''' = x' \wedge y'$
(9) $(x' \vee y')' = (x \wedge y)''$
(10) $(x \vee x')' = 0$

(11) $x' \vee y' \leq (x \wedge y)'$
(12) $x \wedge (x \wedge y)' \geq x \wedge y'$

(証明)

(1) : $x'' \wedge (x \wedge y)' = (x' \vee (x \wedge y))' = ((x' \vee x) \wedge (x' \vee y))''' = ((x' \vee x)'' \wedge (x' \vee y)'')' = ((x'' \wedge x')' \wedge (x' \vee y)'')' = (0' \wedge (x' \vee y)'')' = (1 \wedge (x' \vee y)'')' = ((x' \vee y)'')' = (x' \vee y)' = x'' \wedge y'$ から成り立つ.
(2) : $F8$, $F8^\circ$ と定義 3, $T4, T2$ から明らかである.
(3) : $x \wedge y = 0$ とする. 上の (1) を使って $x'' \wedge y' = x'' \wedge (x \wedge y)' = x'' \wedge 0' = x'' \wedge 1 = x''$ から $x'' \leq y'$ が成り立つ.
(4) : $x \leq y'$ とする. $\wedge$ の単調性を使って $x \wedge y'' \leq y' \wedge y'' = 0$ から $x \wedge y'' = 0$ が成り立つ.
(5) : $x \leq y'$ とすると上の (4) から $x \wedge y'' = 0$. 上の (2), (1) より $x'' \wedge y' = x'' \wedge y''' = x'' \wedge (x \wedge y'')' = x'' \wedge 0' = x'' \wedge 1 = x''$ により $x'' \leq y'$ が成り立つ.
(6) : $F9^\circ$ と上の (2) を使って $(x'' \vee y'')'' = (x''' \wedge y''')' = (x' \wedge y')' = (x \vee y)''$.
(7) : $(x \wedge y)' = (x \wedge y)''' = (x'' \wedge y'')' = (x' \vee y')''$.
(8) : $(x \vee y)''' = (x' \wedge y')'' = x''' \wedge y''' = x' \wedge y'$.
(9) : $(x' \vee y')' = x'' \wedge y'' = (x \wedge y)''$.
(10) : $(x \vee x')' = x' \wedge x'' = 0$.
(11) : $x \wedge y \leq x, y$ に $T9$ を使って $x', y' \leq (x \wedge y)'$ で $T7^\circ$ から $x' \vee y' \leq (x \wedge y)'$.
(12) : $x \wedge y \leq y$ に $T9$ を使って $y' \leq (x \wedge y)'$ で $\wedge$ の単調性から $x \wedge y' \leq x \wedge (x \wedge y)'$. (証明終)

[4] の注意 1 と同様に, 次のことが成り立つ.

[注意 3] 束 ($T1 \sim T4$ と $T6 \sim T7^\circ$ が成り立つ) において, 次の (1), (2), (3) が成り立つ.
(1) $[T10(x' \leq x''')$ かつ $(x \leq y' \Longrightarrow y'' \leq x')] \iff (x \leq y'' \Longrightarrow y' \leq x')$
(2) $(x \vee y)' \leq x' \wedge y' \iff T9(x \leq y \Longrightarrow y' \leq x')$
(3) $(x \wedge y)'' \leq x'' \wedge y'' \iff (x \leq y \Longrightarrow x'' \leq y'')$

[注意 4] $x \odot y = (x' \wedge y')'$ とするとき, 半擬補分配束 (DPL) において, 次のことが成り立つ.
(1) $x' \odot y' = (x \wedge y)'$
(2) $x' \odot 0 = x'$
(3) $x' \wedge (y' \odot z') = (x' \wedge y') \odot (x' \wedge z')$
(4) $(x' \odot y') \wedge z' = (x' \wedge z') \odot (y' \wedge z')$

(証明)

(1) : $x' \odot y' = (x'' \wedge y'')' = (x \wedge y)''' = (x \wedge y)'$.
(2) : $x' \odot 0 = (x'' \wedge 0')' = (x'' \wedge 1)' = x''' = x'$.
(3) : $x' \wedge (y' \odot z') = x' \wedge (y'' \wedge z'')' = x''' \wedge (y' \vee z')'' = (x' \wedge (y' \vee z'))'' = ((x' \wedge y') \vee (x' \wedge z'))'' = ((x' \wedge y')' \wedge (x' \wedge z')')' = (x' \wedge y') \odot (x' \wedge z')$.
(4) : $(x' \odot y') \wedge z' = z' \wedge (x' \odot y') = (z' \wedge x') \odot (z' \wedge y') = (x' \wedge z') \odot (y' \wedge z')$. (証明終)

[定義 4] (SDMA の定義)
A の任意の元 x, y, z に対して, 上の定義 2 の $F1 \sim F10^\circ$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{A}$ を半ド・モルガン代数 (semi-De Morgan algebra (SDMA)) とよぶ ([4]).

上の注意 4 を使うと [7], [8], [9] と同様にして, 次のことが成り立つ.

[注意 5]　**A** を半ド・モルガン代数 (SDMA) とすると, 次の (1) ～ (5) は互いに同値である.

(1) **A** は半擬補分配束 (DPL) である.

(2) **A** で $x'' \wedge (x \wedge y)' = x'' \wedge y'$ が成り立つ.

(3) **A** で $x' \wedge y'' = y'' \wedge (x' \vee y')''$ が成り立つ.

(4) **A** で $z \wedge x = w \wedge x$ かつ $z \vee y = w \vee y$ が成り立つとき $z' \wedge (x' \wedge y)' = w' \wedge (x' \wedge y)'$ が成り立つ.

(5) **A** で $x \wedge z = y \wedge z$ が成り立つとき $x' \wedge z'' = y' \wedge z''$ が成り立つ.

(証明)

(1) $\Longrightarrow$ (2) : 上の注意 2 の (1) から成り立つ.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : $x'' \wedge x' = x'' \wedge (x \wedge 1)' = x'' \wedge 1' = x'' \wedge 0 = 0$ から $x' \wedge x'' = 0$ が成り立つ.

(1) $\Longrightarrow$ (3) : 上の注意 2 の (7) と上の (2) を使って $y'' \wedge (x' \vee y')'' = y'' \wedge (x \wedge y)' = y'' \wedge (y \wedge x)' = y'' \wedge x' = x' \wedge y''$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : 仮定 (3) で $x = 1$ とすると $0 = 0 \wedge y'' = 1' \wedge y'' = y'' \wedge (1' \vee y')'' = y'' \wedge (0 \vee y')'' = y'' \wedge y''' = y'' \wedge y'$.

(1) $\Longrightarrow$ (4) : $z' \wedge (x' \wedge y)' = z' \wedge (x'' \odot y') = (z' \wedge x'') \odot (z' \wedge y') = [(x' \vee z)' \odot 0] \odot (z' \wedge y') = [(x'' \wedge z') \odot (x'' \wedge x')] \odot (z' \wedge y') = [x'' \wedge (z' \odot x')] \odot (z' \wedge y') \cdots (*)$　ここで仮定 $z \wedge x = w \wedge x$ から $z' \odot x' = (z \wedge x)' = (w \wedge x)' = w' \odot x'$. また仮定 $z \vee y = w \vee y$ から $z' \wedge y' = (z \vee y)' = (w \vee y)' = w' \wedge y'$. これから $(*) = [x'' \wedge (w' \odot x')] \odot (w' \wedge y') = [(x'' \wedge w') \odot (x'' \wedge x')] \odot (w' \wedge y') = [(x' \vee w)' \odot 0] \odot (w' \wedge y') = (w' \wedge x'') \odot (w' \wedge y') = w' \wedge (x'' \odot y') = w' \wedge (x' \wedge y)'$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) : 仮定 (4) で $y = z = 1, w = x$ とすると $1 \wedge x = x \wedge x$, $1 \vee 1 = x \vee 1$ が成り立つから $1' \wedge (x' \wedge 1)' = x' \wedge (x' \wedge 1)'$ より $x' \wedge x'' = 0$ が成り立つ.

(1) $\Longrightarrow$ (5) : $x \wedge z = y \wedge z$ とすると $x' \odot z' = (x \wedge z)' = (y \wedge z)' = y' \odot z'$ から $x' \wedge z'' = (x \vee z')' = (x \vee z')' \odot 0 = (x' \wedge z'') \odot (z' \wedge z'') = (x' \odot z') \wedge z'' = (y' \odot z') \wedge z'' = (y' \wedge z'') \odot (z' \wedge z'') = (y \vee z')' \odot 0 = (y \vee z')' = y' \wedge z''$.

(5) $\Longrightarrow$ (1) : 仮定 (5) で $x = z, y = 1$ とすると $z \wedge z = 1 \wedge z$ が成り立つから $z' \wedge z'' = 1' \wedge z''$ より $z' \wedge z'' = 0$ が成り立つ.　(証明終)

[定義 5]　(PDL の定義)

A の任意の元 x, y, z に対して, 上の定義 2 の $F1 \sim F7°$ と $F9°$ と $F10, F10°$ と $x \wedge (x \wedge y)' = x \wedge y'$ が成り立つとき, 代数系 **A** を擬補分配束 (pseudocomplemented distributive lattice (PDL)) とよぶ ([5]).

次の性質は, [5] で定義された擬補分配束 (PDL) と同値である. これにより半擬補分配束に $x \le x''$ を付け加えたものが擬補分配束であることがわかる.

[注意 6]　**A** を BDL とし, $F9°, F10, F10°$ が成り立つとすると, 次の (1), (2) は互いに同値である.

(1) **A** は擬補分配束 (PDL) である (つまり $x \wedge (x \wedge y)' = x \wedge y'$ が成り立つ) .

(2) **A** で $(x \wedge y)'' = x'' \wedge y''$ かつ $x''' = x'$ かつ $x' \wedge x'' = 0$ かつ $x \le x''$ が成り立つ.

(証明)

(1) $\Longrightarrow$ (2) : [5] の注意 3 から成り立つ.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : $F9°$ が成り立つから上の注意 3 の (2) により $T9 (x \le y \Longrightarrow y' \le x')$ が成り立つ.

次に $x \wedge y \le 0 \Longrightarrow x \le y'$ を示す. $x \wedge y \le 0$ とすると $T9$ より $0' \le (x \wedge y)'$. 上の注意 2 の (1) を使って $x'' = x'' \wedge 1 = x'' \wedge 0' \le x'' \wedge (x \wedge y)' = x'' \wedge y' \le x''$ から $x'' \wedge y' = x''$. よって $x \le x'' \le y'$ により $x \le y'$ が成り立つ. これより [5] の定理 1 の $T12$ の証明と同様にして $x \wedge (x \wedge y)' = x \wedge y'$ を示す. $(x \wedge (x \wedge y)') \wedge y = (x \wedge y) \wedge (x \wedge y)' \le (x \wedge y)'' \wedge (x \wedge y)' = 0$ で上のことから $x \wedge (x \wedge y)' \le y'$. これより $x \wedge (x \wedge (x \wedge y)') \le x \wedge y'$ から $x \wedge (x \wedge y)' \le x \wedge y'$. これと上の注意 2 の (12) により $x \wedge (x \wedge y)' = x \wedge y'$ が

成り立つ. (証明終)

§ 3 DPL のシーケントによる形式的体系 GDPL

[3], [4], [5] と同様にシーケントの定義をする.

[定義 6] (シーケント (式) の定義)
ワードの有限列をギリシア大文字 Γ, Δ などで表す. ワードの有限列 $a_1, \ldots, a_m$ を Γ とし, $b_1, \ldots, b_n$ を Δ とするとき, DPL での不等式 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ をシーケント (式) $\Gamma \longrightarrow \Delta$ で表す. ただし, Γ が空のとき ($\Gamma = \emptyset$ と書く), $1 \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ とし, $\Delta = \emptyset$ のときは $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq 0$ とする. $\Gamma = \Delta = \emptyset$ の場合は考えない.

このとき, 半擬補分配束 (DPL) のシーケントによる形式的体系 GDPL を [3], [4], [5] と同様に, 次のように定義する.

[定義 7] (GDPL の定義)

[1] 始式

$(B1)\, a \longrightarrow a \quad (B2)\, 0 \longrightarrow \Delta \quad (B3)\, \Gamma \longrightarrow 1 \quad (B4)\, a' \longrightarrow a''' \quad (B5)\, a''' \longrightarrow a' \quad (B6)\, a', a'' \longrightarrow$

[2] 推論規則

(1) 構造に関する推論規則 :

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{a, \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(w \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}\,(\longrightarrow w)$$

$$\frac{a, a, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a, \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(c \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}\,(\longrightarrow c)$$

$$\frac{\Gamma_1, a, b, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1, b, a, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\,(e \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, a, b, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, b, a, \Delta_2}\,(\longrightarrow e)$$

$$\frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1, a \quad a, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2}\,(cut)$$

(2) 論理記号に関する推論規則 :

$$\frac{a, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b, \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\wedge_1 \longrightarrow) \qquad \frac{b, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b, \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\wedge_2 \longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \vee b}\,(\longrightarrow \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, b}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \vee b}\,(\longrightarrow \vee_2)$$

$$\frac{a, \Gamma \longrightarrow \Delta \quad b, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \vee b, \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\vee \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \quad \Gamma \longrightarrow \Delta, b}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \wedge b}\,(\longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{a \longrightarrow b}{b' \longrightarrow a'}\,(' \longrightarrow ') \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow a'' \quad \Gamma \longrightarrow b''}{\Gamma \longrightarrow (a \wedge b)''}\,(\longrightarrow \wedge'') \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow a' \quad \Gamma \longrightarrow b'}{\Gamma \longrightarrow (a \vee b)'}\,(\longrightarrow \vee')$$

[注意 7] 次の 3 つの同値性が成り立つ.

$$(B4) \Longleftrightarrow \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a'}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a'''}\,(\longrightarrow '') \quad (B5) \Longleftrightarrow \frac{a', \Gamma \longrightarrow \Delta}{a''', \Gamma \longrightarrow \Delta}\,('' \longrightarrow) \quad (B6) \Longleftrightarrow \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a'}{a'', \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(' \longrightarrow)$$

(証明)

$$(B4) \Longrightarrow (\longrightarrow '') : \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a' \qquad a' \longrightarrow a'''}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a'''}\,(cut) \qquad (\longrightarrow '') \Longrightarrow (B4) : \frac{a' \longrightarrow a'}{a' \longrightarrow a'''}\,(\longrightarrow '')$$

$(B5) \Longleftrightarrow ('' \longrightarrow)$: 上と双対である.

$(B6) \Longrightarrow (' \longrightarrow)$: $\dfrac{\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a' \qquad a', a'' \longrightarrow}{\Gamma, a'' \longrightarrow \Delta}}{a'', \Gamma \longrightarrow \Delta}$　　$(' \longrightarrow) \Longrightarrow (B6)$: $\dfrac{\dfrac{a' \longrightarrow a'}{a'', a' \longrightarrow}}{a', a'' \longrightarrow}$　　(証明終)

§4　DPL と GDPL の演繹的同値性

[3], [4], [5] と同様に次の 3 つの定義をする.

[定義 8]　($\vdash$ の定義)
シーケント $\Gamma \longrightarrow \Delta$ が GDPL で証明可能であるとき, $\vdash \Gamma \longrightarrow \Delta$ と書く.

[定義 9]　($\models$ の定義)
不等式 $a \leq b$ が DPL で成り立つとき $\models a \leq b$ と書く.

[定義 10]　(DPL での等号の定義)
a, b をワードとする. $\vdash a \longrightarrow b$ かつ $\vdash b \longrightarrow a$ のとき $a \equiv b$ とすれば, $\equiv$ は 同値関係である. そこで $A/_{\equiv}$ (A の $\equiv$ による商集合) をあらためて A とし, $\equiv$ を $=$ とみなしたものを DPL での等号とする. (つまり, リンデンバウム代数 (Lindenbaum algebra) を考える.)

このとき, [3], [4], [5] と同様にして, 次の 2 つの定理が成り立つ.

[定理 2]　a, b をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\models a \leq b \quad \text{ならば} \quad \vdash a \longrightarrow b$$

(証明)
DPL のすべての公理 ($F1 \sim F11$) が GDPL で証明可能であることを示せばよいが, これらと同値な $T1 \sim T13$ が GDPL で証明可能であることを示す.
$T1 \sim T10^\circ$ と $T12, T12^\circ$ は [4] の定理 2 の証明と同じである.

$T11$: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{x'' \longrightarrow x''}{x'', y'' \longrightarrow x''} \qquad \dfrac{y'' \longrightarrow y''}{x'', y'' \longrightarrow y''}}{x'', y'' \longrightarrow (x \wedge y)''}\,(\longrightarrow \wedge'')}{x'' \wedge y'' \longrightarrow (x \wedge y)''}$　　$T11^\circ$: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{x' \longrightarrow x'}{x', y' \longrightarrow x'} \qquad \dfrac{y' \longrightarrow y'}{x', y' \longrightarrow y'}}{x', y' \longrightarrow (x \vee y)'}\,(\longrightarrow \vee')}{x' \wedge y' \longrightarrow (x \vee y)'}$

$T13$: 始式 $(B6)$ から成り立つ.　　(証明終)

[定理 3]　$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\vdash a_1, \ldots, a_m \longrightarrow b_1, \ldots, b_n \quad \text{ならば} \quad \models a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$$

(証明)
$\Gamma \longrightarrow \Delta$ で Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ を x で表し, Δ が $b_1, \ldots, b_n$ のとき $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を y で表す. GDPL の始式 $(B1), (B2), (B3), (B4), (B5), (B6)$ はそれぞれ $T1, T5, T5^\circ, T10, T10^\circ, T13$ から DPL で成り立つ. 次に GDPL の各推論規則の上式 (上のシーケント) に対応する不等式が DPL で成り立

つと仮定するとき, 下式に対応する不等式が DPL で成り立つことを示せばよい.
$(w \longrightarrow)$〜$(\longrightarrow \wedge)$ は [3] の定理 3 の証明と同じである.
$(' \longrightarrow ')$: $\models a \leq b$ とすると $T9$ から $\models b' \leq a'$ が成り立つ. 次に a がない場合 $\longrightarrow b$ に対応する不等式 $1 \leq b$ が成り立つとすると $T9$ より $b' \leq 1'$ で $T12$ から $b' \leq 0$. よって $b' \longrightarrow$ に対応する不等式が成り立つ. さらに b がない場合も上と双対に出来る.
$(\longrightarrow \wedge'')$: $x \leq a''$ かつ $x \leq b''$ とすると $T7$ より $x \leq a'' \wedge b''$ で $T11$ から $x \leq (a \wedge b)''$ が成り立つ.
$(\longrightarrow \vee')$: $x \leq a'$ かつ $x \leq b'$ とすると $T7$ より $x \leq a' \wedge b'$ で $T11^{\circ}$ から $x \leq (a \vee b)'$ が成り立つ.

(証明終)

以上により DPL と GDPL が演繹的に同値であることがわかる.

参考文献

[1] 荒金 憲一, MS-algebra に双対な代数系について, 奈良高専研究紀要 28(1993), 105–111.

[2] 荒金 憲一, ファジイ代数に関連する代数系について, 奈良高専研究紀要 31(1996), 81–89.

[3] 荒金 憲一, MS 代数とストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 33(1998), 119–127.

[4] 荒金 憲一, 半ド・モルガン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 41(2006), 109–114.

[5] 荒金 憲一, 擬補分配束のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 42(2007), 73–79.

[6] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift 39(1935), 176–216, 405–431.

[7] H.P. Sankappanavar, *Semi-De Morgan algebaras*, The Journal of Symbolic Logic 52(1987), 712–724.

[8] H.P. Sankappanavar, *Demi-pseudocomplemented lattices : principal congruences and subdirect irreducibility*, Algebra Universalis 27(1990), 180–193.

[9] H.P. Sankappanavar, *Varieties of demi-pseudocomplemented lattices*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 37(1991), 411–420.