弱ストーン代数のシーケントによる形式化

荒金　憲一

Sequential formulations for weak Stone algebras

Kenichi ARAGANE

最小元 0 と最大元 1 をもつ分配束（bounded distributive lattice（BDL）: $F1$ ～ $F7°$ を満たす）で 3 重否定律（$F8$, $F8°$ つまり $x''' = x'$）と ∧ に関する半ド・モルガン律（$F9$）と ∨ に関するド・モルガン律（$F9°$）とストーンの等式（$F11$）と 0 , 1 についての性質（$F10$, $F10°$）を満たす代数系が ［7］で定義されている弱ストーン代数（weak Stone algebra（WSA）：［2］の $\widetilde{\mathbb{MPP}}$ と $\mathbb{MP}$ の間にある）である．つまり , ［4］での半ド・モルガン代数（SDMA）に $F11$ を付け加えたものが弱ストーン代数である. 本論文では , 弱ストーン代数で成り立つ性質を調べる．そして弱ストーン代数と演繹的に同値な，G. Gentzen の方法（［6］）でのシーケント（式）による形式的体系 GWSA を考える.

§1　弱ストーン代数（WSA）

ワードの定義は ［3］, ［4］, ［5］ と同じとする .

ワード全体の集合を A とし , ２項演算 ∨ , ∧ と１項演算 ′ をもつ代数系 A =（A ; 0 , 1 , ∨ , ∧ , ′ ）を考える.

［ 定義 1 ］（WSA の定義）

A の任意の元 x , y , z に対して , 次の $F1$ ～ $F11$ が成り立つとき , 代数系 A を弱ストーン代数（WSA）とよぶ（［7］）.

$F1$	$x \wedge 0 = 0$	$F1°$	$x \vee 1 = 1$
$F2$	$x \wedge 1 = x$	$F2°$	$x \vee 0 = x$
$F3$	$x \wedge x = x$	$F3°$	$x \vee x = x$
$F4$	$x \wedge y = y \wedge x$	$F4°$	$x \vee y = y \vee x$
$F5$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$F5°$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$F6$	$x \wedge (x \vee y) = x$	$F6°$	$x \vee (x \wedge y) = x$
$F7$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$F7°$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$F8$	$x' \wedge x''' = x'$	$F8°$	$x' \vee x''' = x'$
$F9$	$(x \wedge y)'' = x'' \wedge y''$	$F9°$	$(x \vee y)' = x' \wedge y'$
$F10$	$0' = 1$	$F10°$	$1' = 0$
$F11$	$x' \vee x'' = 1$		

［ 定義 2 ］（不等式の定義）

x, y を A の任意の元とする．$x \wedge y = x$ が成り立つとき, $x \leq y$ と書く.

［1］, ［3］, ［4］, ［5］ と同様にして , 次の定理が成り立つ.

［ 定理 1 ］ 代数系 A が弱ストーン代数（WSA）であり（つまり $F1$ ～ $F11$ が成り立つ), かつ定義 2 により $x \leq y$ が定義される⟺ A の任意の元 x , y , z に対して A で次の $T1$ ～ $T13$ が成り立つ.

$T1$　$x \leq x$

$T2$　$x \leq y\,,\, y \leq x \Longleftrightarrow x = y$

$T3$　$x \leq y\,,\, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$

$T4$　$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$

$T5$　$0 \leq x$　　$T5°$　$x \leq 1$

$T6$　$x \wedge y \leq x,\ \ x \wedge y \leq y$　　$T6°$　$x \leq x \vee y,\ \ y \leq x \vee y$

$T7$　$z \leq x\,,\, z \leq y \Longrightarrow z \leq x \wedge y$　　$T7°$　$x \leq z\,,\, y \leq z \Longrightarrow x \vee y \leq z$

$T8$　$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$　　$T8°$　$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$

$T9$　$x \leq y \Longrightarrow y' \leq x'$　　$T9°$　$x'' \leq y'' \Longleftrightarrow y' \leq x'$

$T10$　$x' \leq x'''$　　$T10°$　$x''' \leq x'$

$T11$　$x'' \wedge y'' \leq (x \wedge y)''$　　$T11°$　$x' \wedge y' \leq (x \vee y)'$

$T12$　$1' \leq x$　　$T12°$　$x \leq 0'$

$T13$　$1 \leq x' \vee x''$

（証明）

$\Longrightarrow$: $T\,1 \sim T\,12°$ は［4］の定理１の証明と同じである .

$T\,13$: $F\,11$ と $T\,2$ から成り立つ .

$\Longleftarrow$: 定義２により $x \leq y$ が定義されることと $F\,1 \sim F\,10°$ は［4］の定理１の証明と同じである .

$F\,11$: $T\,5°$, $T\,13$ と $T\,2$ により成り立つ .　（証明終）

［定義３］（DPL の定義）

A の任意の元 x , y , z に対して , 上の定義１の $F\,1 \sim F\,10°$ と $x' \wedge x'' = 0$ が成り立つとき , 代数系 A を半擬補分配束（demi-pseudocomplemented distributive lattice（DPL））とよぶ（［5］）.

次のことが成り立つので , ［5］の注意２の性質がすべて弱ストーン代数（WSA）で成り立つ .

［注意１］ A が弱ストーン代数（WSA）ならば A は半擬補分配束（DPL）である .

（証明）

$(x' \vee x'')' = 1'$ より $x'' \wedge x''' = 0$ で $x' \wedge x'' = 0$ が成り立つ .　（証明終）

［3］, ［4］, ［5］と同様に , $\wedge$ と $\vee$ に関する単調性が成り立つ .

［注意２］ 束（$T\,1 \sim T\,4$ と $T\,6 \sim T\,7°$ が成り立つ）において , 次の（1）, (2) が成り立つ .

(1) $x \leq y\,,\, u \leq v \Longrightarrow x \wedge u \leq y \wedge v$（$\wedge$ の単調性）

(2) $x \leq y\,,\, u \leq v \Longrightarrow x \vee u \leq y \vee v$（$\vee$ の単調性）

［5］, ［7］と同様にして , 次の性質が成り立つ.

［注意３］ 弱ストーン代数（WSA）において , 次のことが成り立つ .

(1) $x'' \vee (x \vee y)' = x'' \vee y'$

(2) $x'' \wedge (x'' \wedge y)' = x'' \wedge y'$

(3) $x \vee y = 1 \Longrightarrow y' \leq x''$

(4) $x'' \wedge y = 0 \Longrightarrow x'' \leq y'$

(5) $x' \leq y \Longrightarrow x'' \vee y = 1$

(6) $x' \leq y \Longrightarrow x' \leq y''$

（証明）

(1) : $x'' \vee (x \vee y)' = x'' \vee (x' \wedge y') = (x'' \vee x') \wedge (x'' \vee y') = 1 \wedge (x'' \vee y') = x'' \vee y'$.

(2) : $x'' \wedge (x'' \wedge y)' = (x' \vee (x'' \wedge y))' = ((x' \vee x'') \wedge (x' \vee y))' = (1 \wedge (x' \vee y))' = (x' \vee y)' = x'' \wedge y'$.

(3) : $x \vee y = 1$ とする . 上の（1）を使って $x'' \vee y' = x'' \vee (x \vee y)' = x'' \vee 1' = x'' \vee 0 = x''$ から $y' \leq x''$ が成り立つ .

(4) : $x'' \wedge y = 0$ とする . 上の(2) を使って $x'' \wedge y' = x'' \wedge (x'' \wedge y)' = x'' \wedge 0' = x'' \wedge 1 = x''$ から $x'' \leq y'$ が成り立つ .

(5) : $x' \le y$ とする . $\vee$ の単調性を使って $1 = x' \vee x'' \le y \vee x''$ から $x'' \vee y = 1$ が成り立つ .

(6) : $x' \le y$ とすると上の (5) から $x'' \vee y = 1$ で $(x'' \vee y)' = 1'$ から $x' \wedge y' = 0$. 上の (1) を使って $y'' \vee x' = y'' \vee (y \vee x)' = y'' \vee (y' \wedge x') = y'' \vee 0 = y''$ により $x' \le y''$ が成り立つ . （証明終）

［定義４］(SDMA の定義)

A の任意の元 x , y , z に対して , 上の定義 1 の $F1 \sim F10^\circ$ が成り立つとき , 代数系 A を半ド･モルガン代数 (semi-De Morgan algebra (SDMA)) とよぶ ([4]).

[7] と同様にして , 次のことが成り立つ .

［注意４］A を半ド・モルガン代数（SDMA）とすると , 次の (1) 〜 (5) は互いに同値である .

(1) A は弱ストーン代数（WSA）である .

(2) A で $x'' \vee (x \vee y)' = x'' \vee y'$ が成り立つ .

(3) A で $x' \vee y'' = y'' \vee (x' \wedge y')''$ が成り立つ .

(4) A で $z \vee x = w \vee x$ かつ $z' \wedge y = w' \wedge y$ が成り立つとき $z' \vee (x' \vee y)' = w' \vee (x' \vee y)'$ が成り立つ .

(5) A で $x \vee z = y \vee z$ が成り立つとき $x' \vee z'' = y' \vee z''$ が成り立つ .

（証明）

(1) $\Longrightarrow$ (2) : 上の注意 3 の (1) から成り立つ .

(2) $\Longrightarrow$ (1) : $x'' \vee x' = x'' \vee (x \vee 0)' = x'' \vee 0' = x'' \vee 1 = 1$ から $x' \vee x'' = 1$ が成り立つ .

(1) $\Longrightarrow$ (3) : 上の (2) を使って $y'' \vee (x' \wedge y')'' = y'' \vee (x''' \wedge y''') = y'' \vee (x' \wedge y') = y'' \vee (x \vee y)' = y'' \vee (y \vee x)' = y'' \vee x' = x' \vee y''$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : 仮定 (3) で $x = 0$ とすると $1 = 1 \vee y'' = 0' \vee y'' = y'' \vee (0' \wedge y')'' = y'' \vee (1 \wedge y')'' = y'' \vee (y')'' = y'' \vee y''' = y'' \vee y'$.

(1) $\Longrightarrow$ (4) : 仮定 $z \vee x = w \vee x$ から $(z \vee x)' = (w \vee x)'$ で $z' \wedge x' = w' \wedge x'$. $\vee$ の単調性から $x'' \vee (z' \wedge x') = x'' \vee (w' \wedge x')$ で $(x'' \vee z') \wedge (x'' \vee x') = (x'' \vee w') \wedge (x'' \vee x')$. これから $(x'' \vee z') \wedge 1 = (x'' \vee w') \wedge 1$ で $x'' \vee z' = x'' \vee w'$ より $z' \vee x'' = w' \vee x''$ ･･･①. また仮定 $z' \wedge y = w' \wedge y$ より $(z' \wedge y)'' = (w' \wedge y)''$ で $z''' \wedge y'' = w''' \wedge y''$. $z' \wedge y'' = w' \wedge y''$ に $\vee$ の単調性を使うと $y' \vee (z' \wedge y'') = y' \vee (w' \wedge y'')$. これより $(y' \vee z') \wedge (y' \vee y'') = (y' \vee w') \wedge (y' \vee y'')$ で $(y' \vee z') \wedge 1 = (y' \vee w') \wedge 1$ から $y' \vee z' = y' \vee w'$ で $z' \vee y' = w' \vee y'$ ･･･② が成り立つ. よって①, ② を使って $z' \vee (x' \vee y)' = z' \vee (x'' \wedge y') = (z' \vee x'') \wedge (z' \vee y') = (w' \vee x'') \wedge (w' \vee y') = w' \vee (x'' \wedge y') = w' \vee (x' \vee y)'$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) : 仮定 (4) で $y = z = 0$, $w = x$ とすると $z \vee x = 0 \vee x = x$, $w \vee x = x \vee x = x$ から $z \vee x = w \vee x$. また $z' \wedge y = 1 \wedge 0 = 0$, $w' \wedge y = x' \wedge 0 = 0$ から $z' \wedge y = w' \wedge y$. すると仮定 (4) から $1 = 0' \vee (x' \vee 0)' = x' \vee (x' \vee 0)' = x' \vee x''$.

(1) $\Longrightarrow$ (5) : $x \vee z = y \vee z$ とすると上の (2) を使って $x' \vee z'' = z'' \vee x' = z'' \vee (z \vee x)' = z'' \vee (z \vee y)' = z'' \vee y' = y' \vee z''$.

(5) $\Longrightarrow$ (1) : 仮定 (5) で $x = z$, $y = 0$ とすると $x \vee z = x \vee x = x$, $y \vee z = 0 \vee x = x$ から $x \vee z = y \vee z$. すると仮定 (5) から $x' \vee x'' = 0' \vee x'' = 1 \vee x'' = 1$. （証明終）

§2　WSA のシーケントによる形式的体系 GWSA

[3], [4], [5] と同様にシーケントの定義をする .

［定義５］(シーケント(式) の定義)

ワードの有限列をギリシア大文字 Γ , Δ などで表す. ワードの有限列 $a_1, \ldots, a_m$ を Γ とし , $b_1, \ldots, b_n$ を Δ とすると き , WSA での不等式 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \le b_1 \vee \cdots \vee b_n$ をシーケント(式) $\Gamma \longrightarrow \Delta$ で表す. ただし , Γ が空のとき ($\Gamma = \emptyset$ と書く), $1 \le b_1 \vee \cdots \vee b_n$ とし , $\Delta = \emptyset$ のときは $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \le 0$ とする. $\Gamma = \Delta = \emptyset$ の場合は考えない .

このとき , 弱ストーン代数（WSA）のシーケントによる形式的体系 GWSA を [3], [4], [5] と同様に , 次のように定

義する．

［定義６］（GWSA の定義）

［１］始式

$(B1)\ a \longrightarrow a$　$(B2)\ 0 \longrightarrow \Delta$　$(B3)\ \Gamma \longrightarrow 1$　$(B4)\ a' \longrightarrow a'''$　$(B5)\ a''' \longrightarrow a'$　$(B6) \longrightarrow a', a''$

［２］推論規則

(1) 構造に関する推論規則：

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{a, \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(w \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}\,(\longrightarrow w)$$

$$\frac{a, a, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a, \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(c \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}\,(\longrightarrow c)$$

$$\frac{\Gamma_1, a, b, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1, b, a, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\,(e \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, a, b, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, b, a, \Delta_2}\,(\longrightarrow e)$$

$$\frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1, a \quad a, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2}\,(cut)$$

(2) 論理記号に関する推論規則：

$$\frac{a, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b, \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\wedge_1 \longrightarrow) \qquad \frac{b, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b, \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\wedge_2 \longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \vee b}\,(\longrightarrow \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, b}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \vee b}\,(\longrightarrow \vee_2)$$

$$\frac{a, \Gamma \longrightarrow \Delta \quad b, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \vee b, \Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\vee \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \quad \Gamma \longrightarrow \Delta, b}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \wedge b}\,(\longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{a \longrightarrow b}{b' \longrightarrow a'}\,(' \longrightarrow ') \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow a'' \quad \Gamma \longrightarrow b''}{\Gamma \longrightarrow (a \wedge b)''}\,(\longrightarrow \wedge'') \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow a' \quad \Gamma \longrightarrow b'}{\Gamma \longrightarrow (a \vee b)'}\,(\longrightarrow \vee')$$

［注意５］ 次の 3 つの同値性が成り立つ．

$$(B4) \Longleftrightarrow \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a'}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a'''}\,(\longrightarrow '') \quad (B5) \Longleftrightarrow \frac{a', \Gamma \longrightarrow \Delta}{a''', \Gamma \longrightarrow \Delta}\,('' \longrightarrow) \quad (B6) \Longleftrightarrow \frac{a', \Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a''}\,(\longrightarrow ')$$

（証明）

$(B4)$，$(B5)$ の同値性は［5］の注意 7 の証明と同じである．

$$(B6) \Longrightarrow (\longrightarrow ') : \dfrac{\dfrac{\dfrac{\longrightarrow a', a''}{\longrightarrow a'', a'} \quad a', \Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow a'', \Delta}}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a''} \qquad (\longrightarrow ') \Longrightarrow (B6) : \frac{a' \longrightarrow a'}{\longrightarrow a', a''}$$

（証明終）

§３　WSA と GWSA の演繹的同値性

$\vdash$ と $\models$ の定義は［3],［4],［5］と同様である．

［定義７］（WSA での等号の定義）

a，b をワードとする．$\vdash a \longrightarrow b$ かつ$\vdash b \longrightarrow a$ のとき $a \equiv b$ とすれば，$\equiv$ は同値関係である．そこで $A/\equiv$（A の $\equiv$ による商集合）をあらためて A とし，$\equiv$ を $=$ とみなしたものを WSA での等号とする．（つまり，リンデンバウム代数（Lindenbaum algebra）を考える．）

このとき，[3],［4],［5］と同様にして，次の 2 つの定理が成り立つ．

［定理２］ a，b をワードとするとき，次のことが成り立つ．

$$\models a \leq b \text{ ならば } \vdash a \longrightarrow b$$

（証明）

WSA のすべての公理（$F\,1$ ～ $F\,11$）が GWSA で証明可能であることを示せばよいが，これらと同値な $T\,1$ ～ $T\,13$ が GWSA で証明可能であることを示す．

$T\,1$ ～ $T\,10°$ と $T\,12$，$T\,12°$ は［4］の定理 2 の証明と同じである．

$T\,11$，$T\,11°$ は［5］の定理 2 の証明と同じである．

$T\,13$: 始式（$B6$）から成り立つ．（証明終）

［定理３］ $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ をワードとするとき，次のことが成り立つ．

$$\vdash a_1, \ldots, a_m \longrightarrow b_1, \ldots, b_n \quad \text{ならば} \quad \models a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$$

（証明）

$\Gamma \longrightarrow \Delta$ で Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ を x で表し，Δ が $b_1, \ldots, b_n$ のとき $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を y で表す．GWSA の始式 ($B1$), ($B2$), ($B3$), ($B4$), ($B5$), ($B6$) はそれぞれ $T\,1$, $T\,5$, $T\,5°$, $T\,10$, $T\,10°$, $T\,13$ から WSA で成り立つ．次に GWSA の各推論規則の上式（上のシーケント）に対応する不等式が WSA で成り立つと仮定するとき，下式に対応する不等式が WSA で成り立つことを示せばよい．

（$w \longrightarrow$）～（$\longrightarrow \wedge$）は［3］の定理 3 の証明と同じである．

（$' \longrightarrow '$），（$\longrightarrow \wedge''$），（$\longrightarrow \vee'$）は［5］の定理 3 の証明と同じである．（証明終）

以上により WSA と GWSA が演繹的に同値であることがわかる．

参考文献

［1］荒金憲一，MS-algebra に双対な代数系について，奈良高専研究紀要 28（1993), 105–111.

［2］荒金憲一，ファジイ代数に関連する代数系について，奈良高専研究紀要 31（1996), 81–89.

［3］荒金憲一，MS 代数とストーン代数のシーケントによる形式化，奈良高専研究紀要 33（1998), 119–127.

［4］荒金憲一，半ド・モルガン代数のシーケントによる形式化，奈良高専研究紀要 41（2006), 109–114.

［5］荒金憲一，半擬補分配束のシーケントによる形式化，奈良高専研究紀要 44（2009), 61–67.

［6］G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift 39（1935), 176–216, 405–431.

［7］H.P. Sankappanavar, *Semi-De Morgan algebaras,* The Journal of Symbolic Logic 52（1987), 712–724.