最小交差数４の二次元リボン結び目　Ⅱ

安田　智之

Ribbon 2-knots with ribbon crossing number four. Ⅱ.

Tomoyuki YASUDA

二次元リボン結び目とは、四次元ユークリッド空間内においてm個の二次元球面からなる自明な二次元絡み目に対して、m－１個の二次元円環領域を繋げることによって構成される二次元球面のことである。二次元リボン結び目K^2の構成法を示すこの表示のことをK^2のリボン表示という。またリボン表示において二次元円環領域が自明な二次元絡み目と交差する回数のことを、そのリボン表示のリボン交差数という。更にK^2のすべてのリボン表示を考えたときの、リボン交差数の最小数はK^2の最小交差数とよばれる。これは二次元リボン結び目の複雑さをはかる重要な概念であり、［１］においてで初めて導入された。［１］においては最小交差数が３以下の二次元リボン結び目は17個しかないことが示され、それぞれに対して最小交差数を実現するリボン表示が与えられている。更に［２］では、最小交差数４のリボン結び目がいくつ存在するかについて考察している。結果として２個の二次元球面と１個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示をもつものは高々10個であり、３個の二次元球面と２個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示をもつもののうち、ひとつの二次元円環領域のリボン交差数が３で他方が１のものは、高々29個であることが分かっている。今回、更に３個の二次元球面と２個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示をもつもののうち、ひとつの二次元円環領域のリボン交差数がどちらも２であるものは、高々18個であることが分かった。

１．緒　　論

二次元リボン結び目とは四次元ユークリッド空間においてm個の二次元球面をm－１個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成される二次元球面のことである。四次元ユークリッド空間内の自明でない二次元球面として二次元リボン結び目が発見されて以来、ひとつの二次元リボン結び目K^2を構成するのにどんな方法があるか、また本質的に何種類の方法があるのか、という問題に関心がもたれてきた。

この問題の解決に迫る一つの方法として二次元リボン結び目の最小交差数を決定するという方法がある。ここで最小交差数とは以下のように決められる二次元リボン結び目の不変量である。K^2を構成するための、自明な二次元絡み目と二次元円環領域との対のことをK^2のリボン表示という。リボン表示$\mathcal{R}$において、これを構成する円環領域が球面と交差する回数のことを$\mathcal{R}$のリボン交差数といい、cr（$\mathcal{R}$）で表す。ここでK^2のすべてのリボン表示を考えたとき、そのリボン交差数の最小数がK^2の最小交差数である。これはcr（K^2）で表す。

二次元リボン結び目に関する最小交差数の概念は［１］において初めて導入された。更に［３］では最小交差数を評価する方法のひとつが導入され、その方法によりトーラス結び目のスパン結び目として構成される二次元リボン結び目はすべて最小交差数が決定されることになった。また最小交差数を基準とした二次元リボン結び目の分類問題に関して言えば、[1] において、最小交差数が３以下の二次元リボン結び目がすべて決定され、総数は17個であることが示された。更に、それらの最小交差数を実現するリボン表示も示されている。また [2] では最小交差数が４の二次元リボン結び目のうち２個の二次元球面と１個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示をもつものは高々10個存在し、３個の二次元球面と２個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示をもつもののうち、ひとつの二次元円環領域のリボン交差数が３で他方が１のものは、高々29個存在することが分かっている。

本論文では次のことを示す。

定理　最小交差数４の二次元リボン結び目のうち二つのバンドのリボン交差数がどちらも２であるような３ベースリボン表示が最小交差数を実現するものは高々18個である。

２．準　備

2.1 定義（[1]）

$\{D^3_\mu \mid \mu = 1,2,\cdots,m\}$ を互いに交わらない四次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ 内の三次元球体の族とする。また、$\partial D^3_\mu = O^2_\mu$ とおく。

一方、$f^{r}_{i_r j_r} : D^2 \times I \to \mathbf{R}^4$

$(r=1,2,\cdots,m-1;\ i_r, j_r=1,2,\cdots,m)$ を、像が互いに交わらない埋め込みの族とし、かつ、次の性質（１）、（２）を満たすものとする。但し D^2 は二次元球体、$I=[0,1]$ である。

(1) $f^{r}_{i_r j_r}(D^2\times I) \cap O^2_\mu = \begin{cases} f^{r}_{i_r j_r}(D^2\times\{0\}) & (i_r=\mu) \\ f^{r}_{i_r j_r}(D^2\times\{1\}) & (j_r=\mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $\left(\bigcup_{r=1}^{m-1} f^{r}_{i_r j_r}(D^2\times I)\right) \cup \left(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu\right)$ は連結。

ここで K^2 を二次元球面

$\left(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu\right) \cup \left(\bigcup_{r=1}^{m-1} f^{r}_{i_r j_r}(D^2\times I)\right) - \mathring{T}$ とする。但し

$T=\bigcup_{r=1}^{m-1} f^{r}_{i_r j_r}(D^2\times I)$ であり $\mathring{T}$ はTの内部を表す。

この時、K^2 のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

2.2 定義（[1]）

$\mathcal{O}=\bigcup_{\mu=1}^{m} D^3_\mu$，$\mathcal{B}=\bigcup_{r=1}^{m-1} f^{r}_{i_r j_r}(D^2\times I)$ とおくとき $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ のことを二次元リボン結び目 K^2 に対するｍベースリボン表示（或いは単にリボン表示）と呼ぶ。また $\mathcal{O}$ をベース、$\mathcal{B}$ をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目 K^2 に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことを K^2 のベース指数と呼び $b(K^2)$ で表す。このとき K^2 は $b(K^2)$ ベース二次元リボン結び目であるという。

2.3 定義（[1]）

$\ell_r = f^{r}_{i_r j_r}(\{0\}\times I)$ $(r=1,2,\cdots,m-1)$ とおく。但し、$\{0\}$ は D^2 の中心点である。ここで各 ℓ_r が $\mathcal{O}$ に有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各 ℓ_r の方向に従って a_{r1}，a_{r2}，…，a_{rS_r} とし $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ のリボン交差と呼ぶ。但し各 ℓ_r の方向が O^2_i から O^2_j へ向かう方向とする。この時 $n=\sum_{r=1}^{m} s_r$ をリボン表示のリボン交差数と呼び、$(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ はｎ交差リボン表示であるという。そうして K^2 に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことを K^2 の最小交差数（或いは単に交差数）と呼び cr（K^2）で表す。

2.4 定義

a_{r1}，a_{r2}，…，a_{rS_r} に対応して、s_r 個の文字からなる語 w_r をつくる。つくり方は ℓ_r が D^3_μ に点 a_{rv} $(v=1,2,\cdots,s_r)$ で正の側から交わるとき、w_r のｖ番目の文字を x_μ、負の側から交わるときは同様 x^{-1}_μ とするものとする。このようにしてつくられた語 $w_1, w_2, \cdots, w_{m-1}$ を利用して K^2 の結び目群 $\pi_1(\mathbf{R}^4-K^2)$ の群表示を次の様に構成できる。

（＊１）$[x_\mu;\ \mu=1,2,\cdots,m \mid x_i w_r x_j^{-1} w_r^{-1};\ r=1,2,\cdots,m-1]$

但し各 x_μ は O^2_μ のメリディアン生成元とする（［３］）。以上の様な構成法でリボン表示 $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ から得られた群表示（＊１）のことを $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ に関連したリボン群表示と呼ぶ。また各 w_r のことをこのリボン群表示の語と呼ぶ。

一方、リボン群表示（＊１）からは、逆の手順でリボン表示 $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ を定められるので $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ のことをリボン群表示（＊１）に関連したリボン表示と呼ぶ。

３．定理の証明

最小交差数４のリボン結び目のうち、二つのバンドのリボン交差数がどちらも２であるような３ベースリボン表示が最小交差数４を実現するものを列挙する。

次のリボン群表示 G_j に関連したリボン表示を $\mathcal{R}_j$ とする。

$G_j=[x_1,x_2,x_3 \mid x_1 w_{j1} x^{-1}_2 w^{-1}_{j1},\ x_1 w_{j2} x^{-1}_3 w_{j2}]$

ここで　w_{j1}, w_{j2} は文字 $x_1, x^{-1}_1, x_2, x^{-1}_2, x_3, x^{-1}_3$　のいずれかでつくられる２文字の語である。６つの文字の優先順位は文字 $x_1, x^{-1}_1, x_2, x^{-1}_2, x_3, x^{-1}_3$ の順であるとして、辞書式順序で w_{j1} が２文字と w_{j2} が２文字の計四文字の語 w_j をすべて並べ、対応するリボン表示が最小交差数３以下の二次元リボン結び目を実現するものと、［２］で列挙された最小交差数４の二次元リボン結び目実現するものとを省くと次のようになる。

$w_{40} = x_2\ x_1\ ,\ x_3\ x_1$

$w_{41} = x_2\ x_1\ ,\ x_3\ x^{-1}_1$

$w_{42} = x_2\ x_1\ ,\ x^{-1}_3\ x_1$

$w_{43} = x_2\ x_1\ ,\ x_3\ x_2$

$w_{44} = x_2\ x_1\ ,\ x_3\ x^{-1}_2$

$w_{45} = x_2\ x_1\ ,\ x^{-1}_3\ x_2$

$w_{46} = x_2\ x^{-1}_1\ ,\ x^{-1}_3\ x^{-1}_2$

$w_{47} = x_2\ x^{-1}_1\ ,\ x_3\ x^{-1}_1$

$w_{48} = x_2\ x^{-1}_1\ ,\ x^{-1}_3\ x_1$

$w_{49} = x_2\ x^{-1}_1\ ,\ x_3\ x_2$

$w_{50} = x_2\ x^{-1}_1\ ,\ x_3\ x^{-1}_2$

$w_{51} = x_2\ x^{-1}_1\ ,\ x^{-1}_3\ x_2$

$w_{52} = x^{-1}_2\ x_1\ ,\ x^{-1}_3\ x_1$

$w_{53} = x^{-1}_2 x_1 \ , \ x_3 \ x_2$
$w_{54} = x^{-1}_2 x_1 \ , \ x_3 \ x^{-1}_2$
$w_{55} = x^{-1}_2 x_1 \ , \ x^{-1}_3 x_2$
$w_{56} = x^{-1}_2 x^{-1}_1 \ , \ x^{-1}_3 x^{-1}_1$
$w_{57} = x_2 \ x^{-1}_3 \ , \ x^{-1}_2 x^{-1}_1$

一方、各 G_j に対して［5］における二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式計算法を適用すると、容易にリボン表示 $\mathcal{R}_j$ の実現する二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式　Δ_j　(mod ± t^a)が次のように求まる。従って定理に該当するものは高々 18 個である。

$\Delta_{40} = (-1 + t - t^2)^2$
$\Delta_{41} = (-1 + t - t^2)(-2 + t)$
$\Delta_{42} = (-1 + t - t^2)(1 - 2t)$
$\Delta_{43} = (-1 + t - t^2)^2$
$\Delta_{44} = (-1 + t - t^2)(-2 + t)$
$\Delta_{45} = (-1 + t - t^2)(1 - 2t)$
$\Delta_{46} = (-1 + t - t^2)^2$
$\Delta_{47} = (-2 + t)^2$
$\Delta_{48} = (-2 + t)(1 - 2t)$
$\Delta_{49} = (-1 + t - t^2)(-2 + t)$
$\Delta_{50} = (-2 + t)^2$
$\Delta_{51} = (-2 + t)(1 - 2t)$
$\Delta_{52} = (-1 + 2t)^2$
$\Delta_{53} = (-1 + t - t^2)(1 - 2t)$
$\Delta_{54} = (-2 + t)(1 - 2t)$
$\Delta_{55} = (-1 + 2t)^2$
$\Delta_{56} = (-1 + t - t^2)^2$
$\Delta_{57} = -2 + t^3$

但し、$\mathcal{R}_{40}$ と $\mathcal{R}_{56}$，$\mathcal{R}_{41}$ と $\mathcal{R}_{42}$，$\mathcal{R}_{43}$ と $\mathcal{R}_{46}$，$\mathcal{R}_{44}$ と $\mathcal{R}_{45}$，$\mathcal{R}_{47}$ と $\mathcal{R}_{52}$，$\mathcal{R}_{49}$ と $\mathcal{R}_{53}$，$\mathcal{R}_{50}$ と $\mathcal{R}_{55}$，$\mathcal{R}_{51}$ と $\mathcal{R}_{54}$ はそれぞれ互いに鏡像の関係にある。

（証了）

参考文献

［1］Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 10 (2001), 999-1003.

［2］安田智之、最小交差数４の二次元リボン結び目、奈良工業高等専門学校研究紀要 44 号（2008 年 3 月)、69-72.

［3］Yasuda,T., An evaluation of the crossing number on ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 15 (2006), 1- 9.

［4］Yajima, T., On characterization of knot groups of some spheres in R^4 , *Osaka J. Math*. 6 (1969) , 435-446.

［5］Yasuda,T.,A presentation and the genus for ribbon n-knots, *Kobe J. Math*. 6 (1989), 71-88.