概擬補分配束のシーケントによる形式化

荒金　憲一

Sequential formulations for almost pseudocomplemented distributive lattices

Kenichi ARAGANE

最小元 0 と最大元 1 をもつ分配束 (bounded distributive lattice(BDL) : $F1 \sim F7^\circ$ を満たす) で 3 重否定律 ($F8$, $F8^\circ$ つまり $x''' = x'$) と半ド・モルガン律 ($F9$, $F9^\circ$) と矛盾律 ($F11$) と 0,1 についての性質 ($F10$, $F10^\circ$) を満たす代数系が [8], [9], [10], [11] で定義されている概擬補分配束 (almost pseudocomplemented distributive lattice (APL) : [2] の $\mathbb{MP}\widetilde{\mathbb{P}}$ と $\mathbb{MP}$ の間にある) である．つまり , [4] での半ド・モルガン代数 (SDMA) に $F11$ を付け加えたものが概擬補分配束である . 本論文では , 概擬補分配束で成り立つ性質を調べる．そして概擬補分配束と演繹的に同値な, G. Gentzen の方法 ([7]) でのシーケント (式) による形式的体系 GAPL を考える.

§1　ワード

[3], [4], [5], [6] と同様にワードを定義する.

[定義 1]　(ワードの定義)

(1)　定数 0, 1 はワードである.

(2)　変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ はワードである.

(3)　x と y がワードのとき $x \wedge y$, $x \vee y$, x' はワードである.

(4)　以上の (1), (2), (3) によって構成された記号列のみがワードである.

ワード全体の集合を A とし, 2 項演算 $\vee, \wedge$ と 1 項演算 $'$ をもつ代数系 $\mathbf{A} = (A\,;\, 0,\ 1,\ \vee,\ \wedge,\ ')$ を考える.

§2　概擬補分配束 (APL)

[定義 2]　(APL の定義)

A の任意の元 x, y, z に対して, 次の $F1 \sim F11$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{A}$ を概擬補分配束 (APL) とよぶ ([8], [9], [10], [11]).

$F1$	$x \wedge 0 = 0$	$F1^\circ$	$x \vee 1 = 1$
$F2$	$x \wedge 1 = x$	$F2^\circ$	$x \vee 0 = x$
$F3$	$x \wedge x = x$	$F3^\circ$	$x \vee x = x$
$F4$	$x \wedge y = y \wedge x$	$F4^\circ$	$x \vee y = y \vee x$
$F5$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$F5^\circ$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$F6$	$x \wedge (x \vee y) = x$	$F6^\circ$	$x \vee (x \wedge y) = x$
$F7$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$F7^\circ$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$F8$	$x' \wedge x''' = x'$	$F8^\circ$	$x' \vee x''' = x'$
$F9$	$(x \wedge y)'' = x'' \wedge y''$	$F9^\circ$	$(x \vee y)' = x' \wedge y'$
$F10$	$0' = 1$	$F10^\circ$	$1' = 0$
$F11$	$x \wedge x' = 0$		

[定義 3]　(不等式の定義)
x, y を A の任意の元とする．$x \wedge y = x$ が成り立つとき，$x \leq y$ と書く．

[1], [3], [4], [5], [6] と同様にして, 次の定理が成り立つ．

[定理 1]　代数系 $\mathbf{A}$ が 概擬補分配束 (APL) であり (つまり $F1 \sim F11$ が成り立つ), かつ定義 3 により $x \leq y$ が定義される $\Longleftrightarrow$ A の任意の元 x, y, z に対して $\mathbf{A}$ で次の $T1 \sim T13$ が成り立つ．

$T1$	$x \leq x$		
$T2$	$x \leq y,\ y \leq x \Longleftrightarrow x = y$		
$T3$	$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$		
$T4$	$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$		
$T5$	$0 \leq x$	$T5^\circ$	$x \leq 1$
$T6$	$x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y$	$T6^\circ$	$x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y$
$T7$	$z \leq x,\ z \leq y \Longrightarrow z \leq x \wedge y$	$T7^\circ$	$x \leq z,\ y \leq z \Longrightarrow x \vee y \leq z$
$T8$	$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$T8^\circ$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$
$T9$	$x \leq y \Longrightarrow y' \leq x'$	$T9^\circ$	$x'' \leq y'' \Longleftrightarrow y' \leq x'$
$T10$	$x' \leq x'''$	$T10^\circ$	$x''' \leq x'$
$T11$	$x'' \wedge y'' \leq (x \wedge y)''$	$T11^\circ$	$x' \wedge y' \leq (x \vee y)'$
$T12$	$1' \leq x$	$T12^\circ$	$x \leq 0'$
$T13$	$x \wedge x' \leq 0$		

(証明)
$\Longrightarrow$: $T1 \sim T12^\circ$ は [3], [4] の定理 1 の証明と同じである．
$T13$：$F11$ と $T2$ から成り立つ．
$\Longleftarrow$: 定義 3 により $x \leq y$ が定義されることと $F1 \sim F10^\circ$ は [3], [4] の定理 1 の証明と同じである．
$F11$: $T5, T13$ と $T2$ により成り立つ．　(証明終)

[6] の注意 6 から PDL を次のように定義することが出来る．

[定義 4]　(PDL の定義)
A の任意の元 x, y, z に対して, 上の定義 2 の $F1 \sim F10^\circ$ と $x' \wedge x'' = 0$ と $x \leq x''$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{A}$ を擬補分配束 (pseudocomplemented distributive lattice (PDL)) とよぶ ([5], [6])．

[定義 5]　(DPL の定義)
A の任意の元 x, y, z に対して, 上の定義 2 の $F1 \sim F10^\circ$ と $x' \wedge x'' = 0$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{A}$ を半擬補分配束 (demi-pseudocomplemented distributive lattice (DPL)) とよぶ ([6])．

[3], [4], [5], [6] と同様に, $\wedge$ と $\vee$ に関する単調性が成り立つ．

[注意 1]　束において, 次の (1), (2) が成り立つ．
(1) $x \leq y, u \leq v \Longrightarrow x \wedge u \leq y \wedge v$　($\wedge$ の単調性)
(2) $x \leq y, u \leq v \Longrightarrow x \vee u \leq y \vee v$　($\vee$ の単調性)

定義から次のことが成り立つ ([8], [9], [10], [11])．

[注意 2]
(1) $\mathbf{A}$ が擬補分配束 (PDL) $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ が概擬補分配束 (APL)
(2) $\mathbf{A}$ が概擬補分配束 (APL) $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ が半擬補分配束 (DPL)
(3) ($\mathbf{A}$ が概擬補分配束 (APL) ならば $\mathbf{A}$ が擬補分配束 (PDL)) $\Longleftrightarrow$ APL である $\mathbf{A}$ が $x \leq x''$ を満たす.
(証明)
(1) : $x \wedge x' \leq x' \wedge x'' = 0$ から $x \wedge x' = 0$ が成り立つ.
(2) : 定義から明らかである.
(3) : 定義から明らかである. (証明終)

上の注意 2 の (2) と [6] の注意 2 から, 次の (1) $\sim$ (12) が成り立ち, さらに次の (13) $\sim$ (21) が成り立つ.

[注意 3] 概擬補分配束 (APL) において, 次のことが成り立つ.
(1) $x'' \wedge (x \wedge y)' = x'' \wedge y'$
(2) $x''' = x'$
(3) $x \wedge y = 0 \Longrightarrow x'' \leq y'$
(4) $x \leq y' \Longrightarrow x \wedge y'' = 0$
(5) $x \leq y' \Longrightarrow x'' \leq y'$
(6) $(x \vee y)'' = (x' \wedge y')' = (x'' \vee y'')''$
(7) $(x \wedge y)' = (x'' \wedge y'')' = (x' \vee y')''$
(8) $(x \vee y)''' = x' \wedge y'$
(9) $(x' \vee y')' = (x \wedge y)''$
(10) $(x \vee x')' = 0$
(11) $x' \vee y' \leq (x \wedge y)'$
(12) $x \wedge (x \wedge y)' \geq x \wedge y'$
(13) $x' \wedge (x \vee y) = x' \wedge y$
(14) $x' \wedge (x \wedge y) = 0$
(15) $x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y$
(16) $x' \wedge (x \vee y')'' = x' \wedge y'$
(17) $x \wedge (x \vee y)' = 0$
(18) $x \vee y = 1 \Longrightarrow x' \leq y$
(19) $x \leq y \Longrightarrow x \wedge y' = 0$
(20) $x \leq y' \Longrightarrow x \wedge y = 0$
(21) $x \wedge y = 0 \Longrightarrow x'' \wedge y = 0$
(証明)
(13) : $x' \wedge (x \vee y) = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge y) = 0 \vee (x' \wedge y) = x' \wedge y$
(14) : $x' \wedge (x \wedge y) = (x' \wedge x) \wedge y = 0 \wedge y = 0$
(15) : $x \wedge (x' \vee y) = (x \wedge x') \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y$
(16) : $x' \wedge (x \vee y')'' = x''' \wedge (x \vee y')'' = (x' \wedge (x \vee y'))'' = ((x' \wedge x) \vee (x' \wedge y'))'' = (0 \vee (x' \wedge y'))'' = (x' \wedge y')'' = x''' \wedge y''' = x' \wedge y'$
(17) : $x \wedge (x \vee y)' = x \wedge (x' \wedge y') = (x \wedge x') \wedge y = 0 \wedge y = 0$
(18) : $x \vee y = 1$ とすると上の (13) から $x' \wedge y = x' \wedge (x \vee y) = x' \wedge 1 = x'$ から $x' \leq y$ が成り立つ.
(19) : $x \leq y$ とすると $x \wedge y' \leq y \wedge y' = 0$ から $x \wedge y' = 0$ が成り立つ.
(20) : $x \leq y'$ とすると $x \wedge y \leq y' \wedge y = 0$ から $x \wedge y = 0$ が成り立つ.
(21) : $x \wedge y = 0$ とすると上の (3) から $x'' \leq y'$ で $x'' \wedge y \leq y' \wedge y = 0$ から $x'' \wedge y = 0$ が成り立つ. (証明終)

[定義 6] (SDMA の定義)
A の任意の元 x, y, z に対して, 上の定義 2 の $F1 \sim F10^\circ$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{A}$ を半ド・モルガン代数 (semi-De Morgan algebra (SDMA)) とよぶ ([4]).

上の注意 3 を使うと [6] と同様にして, 次のことが成り立つ.

[注意 4] $\mathbf{A}$ を 半ド・モルガン代数 (SDMA) とすると, 次の (1) ～ (3) は互いに同値である.
(1) $\mathbf{A}$ は 概擬補分配束 (APL) である.
(2) $\mathbf{A}$ で $x' \wedge (x \vee y) = x' \wedge y$ が成り立つ.
(3) $\mathbf{A}$ で $x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y$ が成り立つ.
(証明)
(1) $\Longrightarrow$ (2) : 上の注意 3 の (13) から成り立つ.
(2) $\Longrightarrow$ (1) : $x' \wedge x = x' \wedge (x \vee 0) = x' \wedge 0 = 0$ から $x \wedge x' = 0$ が成り立つ.
(1) $\Longrightarrow$ (3) : 上の注意 3 の (15) から成り立つ.
(3) $\Longrightarrow$ (1) : $x \wedge x' = x \wedge (x' \vee 0) = x \wedge 0 = 0$ (証明終)

[10] と同様にして, 次のことが成り立つ.

[注意 5] $\mathbf{A}$ を 半擬補分配束 (DPL) とし, $D_0 = \{x \in A \,|\, x'' = 0\}$ とおくと, 次の (1), (2) は同値である.
(1) $\mathbf{A}$ は 概擬補分配束 (APL) である.
(2) $\mathbf{A}$ で $D_0 = \{0\}$ が成り立つ.
(証明)
(1) $\Longrightarrow$ (2) : $0'' = 0$ より $\{0\} \subset D_0$. 次に, $x \in D_0$ のとき, $x'' = 0$ より $x' = x''' = 0' = 1$ から $x = x \wedge 1 = x \wedge x' = 0$ で $D_0 \subset \{0\}$. よって $D_0 = \{0\}$ が成り立つ.
(2) $\Longrightarrow$ (1) : $x \in A$ とすると $\mathbf{A}$ は DPL であるから $(x \wedge x')'' = x'' \wedge x''' = x'' \wedge x' = 0$ で $x \wedge x' \in D_0$. 仮定 (2) から $x \wedge x' = 0$. よって $\mathbf{A}$ は APL である. (証明終)

§3 APL のシーケントによる形式的体系 GAPL

[3], [4], [5], [6] と同様にシーケントの定義をする.

[定義 7] (シーケント (式) の定義)
ワードの有限列をギリシア大文字 Γ, Δ などで表す. ワードの有限列 $a_1, \ldots, a_m$ を Γ とし, $b_1, \ldots, b_n$ を Δ とするとき, APL での不等式 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ をシーケント (式) $\Gamma \longrightarrow \Delta$ で表す. ただし, Γ が空のとき ($\Gamma = \emptyset$ と書く), $1 \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ とし, $\Delta = \emptyset$ のときは $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq 0$ とする. $\Gamma = \Delta = \emptyset$ の場合は考えない.

このとき, 概擬補分配束 (APL) のシーケントによる形式的体系 GAPL を [3], [4], [5], [6] と同様に, 次のように定義する.

[定義 8] (GAPL の定義)
[1] 始式
$(B1)\, a \longrightarrow a$ $(B2)\, 0 \longrightarrow \Delta$ $(B3)\, \Gamma \longrightarrow 1$ $(B4)\, a' \longrightarrow a'''$ $(B5)\, a''' \longrightarrow a'$ $(B6)\, a,\, a' \longrightarrow$

[2] 推論規則

(1) 構造に関する推論規則 ：

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\,\Gamma \longrightarrow \Delta}\,(w \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a}\,(\longrightarrow w)$$

$$\frac{a,\,a,\,\Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\,\Gamma \longrightarrow \Delta}\,(c \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a,\,a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a}\,(\longrightarrow c)$$

$$\frac{\Gamma_1,\,a,\,b,\,\Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1,\,b,\,a,\,\Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\,(e \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\,a,\,b,\,\Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\,b,\,a,\,\Delta_2}\,(\longrightarrow e)$$

$$\frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1,\,a \quad a,\,\Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1,\,\Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1,\,\Delta_2}\,(cut)$$

(2) 論理記号に関する推論規則 ：

$$\frac{a,\,\Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\,\Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\wedge_1 \longrightarrow) \qquad \frac{b,\,\Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\,\Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\wedge_2 \longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a \vee b}\,(\longrightarrow \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a \vee b}\,(\longrightarrow \vee_2)$$

$$\frac{a,\,\Gamma \longrightarrow \Delta \quad b,\,\Gamma \longrightarrow \Delta}{a \vee b,\,\Gamma \longrightarrow \Delta}\,(\vee \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a \quad \Gamma \longrightarrow \Delta,\,b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a \wedge b}\,(\longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{a \longrightarrow b}{b' \longrightarrow a'}\,({}' \longrightarrow {}') \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow a'' \quad \Gamma \longrightarrow b''}{\Gamma \longrightarrow (a \wedge b)''}\,(\longrightarrow \wedge'') \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow a' \quad \Gamma \longrightarrow b'}{\Gamma \longrightarrow (a \vee b)'}\,(\longrightarrow \vee')$$

[注意 6]　次の 3 つの同値性が成り立つ.

$(B4) \Longleftrightarrow \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a'}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a'''}\,(\longrightarrow {}'')$; $(B5) \Longleftrightarrow \dfrac{a',\,\Gamma \longrightarrow \Delta}{a''',\,\Gamma \longrightarrow \Delta}\,({}'' \longrightarrow)$; $(B6) \Longleftrightarrow \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a}{a',\,\Gamma \longrightarrow \Delta}\,({}' \longrightarrow)$

(証明)

$(B4) \Longleftrightarrow (\longrightarrow {}'')$ と $(B5) \Longleftrightarrow ({}'' \longrightarrow)$ は [6] の注意 7 の証明と同じである.

$(B6) \Longrightarrow ({}' \longrightarrow)$: $\dfrac{\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\,a \qquad a,\,a' \longrightarrow}{\Gamma,\,a' \longrightarrow \Delta}}{a',\,\Gamma \longrightarrow \Delta}$　　$({}' \longrightarrow) \Longrightarrow (B6)$: $\dfrac{\dfrac{a \longrightarrow a}{a',\,a \longrightarrow}}{a,\,a' \longrightarrow}$　　(証明終)

§4　APL と GAPL の演繹的同値性

[3], [4], [5], [6] と同様に次の 3 つの定義をする.

[定義 9]　($\vdash$ の定義)

シーケント $\Gamma \longrightarrow \Delta$ が GAPL で証明可能であるとき, $\vdash \Gamma \longrightarrow \Delta$ と書く.

[定義 10]　($\models$ の定義)

不等式 $a \leq b$ が APL で成り立つとき $\models a \leq b$ と書く.

[定義 11]　(APL での等号の定義)

$a,\,b$ をワードとする. $\vdash a \longrightarrow b$ かつ $\vdash b \longrightarrow a$ のとき $a \equiv b$ とすれば, $\equiv$ は 同値関係である. そこで

$A/_{\equiv}$ (A の $\equiv$ による商集合) をあらためて A とし, $\equiv$ を $=$ とみなしたものを APL での等号とする. (つまり, リンデンバウム代数 (Lindenbaum algebra) を考える.)

このとき, [3], [4], [5], [6] と同様にして, 次の 2 つの定理が成り立つ.

[定理 2]　a, b をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\models a \leq b \quad \text{ならば} \quad \vdash a \longrightarrow b$$

(証明)
APL のすべての公理 ($F1 \sim F11$) が GAPL で証明可能であることを示せばよいが, これらと同値な $T1 \sim T13$ が GAPL で証明可能であることを示す.
$T1 \sim T10^{\circ}$ と $T12, T12^{\circ}$ は [3], [4] の定理 2 の証明と同じである.
$T11, T11^{\circ}$ は [6] の定理 2 の証明と同じである.
$T13$: 始式 ($B6$) から成り立つ.　(証明終)

[定理 3]　$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\vdash a_1, \ldots, a_m \longrightarrow b_1, \ldots, b_n \quad \text{ならば} \quad \models a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$$

(証明)
$\Gamma \longrightarrow \Delta$ で Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ を x で表し, Δ が $b_1, \ldots, b_n$ のとき $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を y で表す. GAPL の始式 ($B1$), ($B2$), ($B3$), ($B4$), ($B5$), ($B6$) はそれぞれ $T1$, $T5$, $T5^{\circ}$, $T10$, $T10^{\circ}$, $T13$ から APL で成り立つ. 次に GAPL の各推論規則の上式 (上のシーケント) に対応する不等式が APL で成り立つと仮定するとき, 下式に対応する不等式が APL で成り立つことを示せばよい.
(w $\longrightarrow$)$\sim$($\longrightarrow$ $\wedge$) は [3] の定理 3 の証明と同じである.
($'$ $\longrightarrow$ $'$)$\sim$($\longrightarrow$ $\vee'$) は [6] の定理 3 の証明と同じである.　(証明終)

以上により APL と GAPL が演繹的に同値であることがわかる.

参考文献

[1] 荒金憲一, MS-algebra に双対な代数系について, 奈良高専研究紀要 28（1993）, 105–111.
[2] 荒金憲一, ファジイ代数に関連する代数系について, 奈良高専研究紀要 31（1996）, 81–89.
[3] 荒金憲一, MS 代数とストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 33（1998）, 119–127.
[4] 荒金憲一, 半ド・モルガン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 41（2006）, 109–114.
[5] 荒金憲一, 擬補分配束のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 42（2007）, 73–79.
[6] 荒金憲一, 半擬補分配束のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 47（2009）, 61–67.
[7] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift 39 (1935), 176–216, 405–431.
[8] H.P. Sankappanavar, *Semi-De Morgan algebras*, The Journal of Symbolic Logic 52（1987）, 712–724.
[9] H.P. Sankappanavar, *Pseudocomplemented and almost pseudocomplemented Ockham algebras* : *Principal congruences*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 35（1989）, 229–236.
[10] H.P. Sankappanavar, *Demi-pseudocomplemented lattices* : *Principal congruences and subdirect irreducibility,* Algebra Universalis 27（1990）, 180–193.
[11] H.P. Sankappanavar, *Varieties of demi-pseudocomplemented lattices*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 37（1991）, 411–420.