最小交差数４の二次元リボン結び目　Ⅲ

安田　智之

Ribbon 2-knots with ribbon crossing number four. Ⅲ.

Tomoyuki YASUDA

二次元リボン結び目は，m個の二次元球面からなる自明な二次元絡み目に対して，m－１個の二次元円環領域を繋げることによって得られる二次元球面のことで、ふつうは四次元ユークリッド空間内でこれを考える。二次元リボン結び目K^2のひとつの構成法を示すこの表示のことをK^2のリボン表示という。また、リボン表示において二次元円環領域が自明な二次元絡み目と交差する回数のことを，そのリボン表示のリボン交差数というが，K^2のすべてのリボン表示を考えたときのリボン交差数の最小数はK^2の最小交差数とよばれる。これは二次元リボン結び目の複雑さをはかる重要な概念であり，[1] で初めて導入された。[1] においては最小交差数が３以下の二次元リボン結び目は 17 個しか存在しないことが示され，それぞれに対して最小交差数を実現するリボン表示が与えられた。更に，[2], [3] においては最小交差数が４の二次元リボン結び目のうちで，「2 個の二次元球面と１個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示が最小交差数４を実現するもの」を調べ，それを除き今度は「3 個の二次元球面と２個の二次元円環領域を繋げることによって得られるリボン表示が最小交差数４を実現するもの」が調べられている。結果，これらは合わせて高々 56 個しか存在しないことが判っている。

今回は最小交差数４の二次元リボン結び目のうちで，「4 個の二次元球面と３個の二次元円環領域を繋げる事によって得られるリボン表示が最小交差数４を実現するもの」を調べた。結果，これらは高々 35 個しか存在しないことが判った。

１. 緒　　論

二次元リボン結び目とは四次元ユークリッド空間においてm個の二次元球面をｍ－１個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成される二次元球面である。自明でない二次元球面として二次元リボン結び目が発見されて以来、ひとつの二次元リボン結び目を構成するのにどんな方法があるか、また本質的に何種類の方法があるのか、という問題に関心がもたれてきた。

この問題の解決に迫る一つの方法として二次元リボン結び目の最小交差数を決定するという方法がある。ここで最小交差数とは以下のように決められる二次元リボン結び目の不変量である。K^2を構成するための、自明な二次元絡み目と二次元円環領域との対のことをK^2のリボン表示という。リボン表示 $\mathcal{R}$ において、これを構成する円環領域が球面と交差する回数のことをＲのリボン交差数といい、cr ($\mathcal{R}$) で表される。ここでK^2のすべてのリボン表示を考えたとき、そのリボン交差数の最小数がK^2の最小交差数である。これは cr (K^2) で表される。

二次元リボン結び目に関する最小交差数の概念は [1] において初めて導入された。そうして [4] では最小交差数を評価する方法のひとつが導入され、トーラス結び目のスパン結び目として構成される二次元リボン結び目はすべて最小交差数が決定されることになった。また最小交差数を基準とした二次元リボン結び目の分類問題に関して言えば、[1] において、最小交差数が３以下の二次元リボン結び目がすべて決定され、総数は 17 個であることが示された。また、それらの最小交差数を実現するリボン表示も示されている。更に [2]，[3] では最小交差数が４の二次元リボン結び目のうち，「2 個の二次元球面を１個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成されるリボン表示が最小交差数４を実現するもの」,「3 個の二次元球面を２個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成されるリボン表示が最小交差数４を実現するもの」が調べられている。これらの総数は高々 56 個である。

本論文では次のことを示す。

定理　最小交差数４の二次元リボン結び目のうち４ベースリボン表示が最小交差数を実現するものは [1], [2], [3] に掲載されたものを除けば高々35個である。

２．準　備

2.1. 定義（([1])

$\{D^3_\mu \mid \mu = 1, 2, \cdots, m\}$を互いに交わらない四次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ 内の三次元球体の族とする。また、$\partial D^3_\mu = O^2_\mu$ とおく。

一方、$f^r_{irjr} : D^2 \times I \rightarrow \mathbf{R}^4$

$(r = 1, 2, \cdots, m-1;\ i_r, j_r = 1, 2, \cdots, m)$を、像が互いに交わらない埋め込みの族とし、かつ、次の性質(１)、(２)を満たすものとする。但し D^2 は二次元球体、$I = [0, 1]$である。

$$(1)\ f^r_{irjr}(D^2 \times I) \cap O^2_\mu = \begin{cases} f^r_{irjr}(D^2 \times \{0\}) & (i_r = \mu) \\ f^r_{irjr}(D^2 \times \{1\}) & (j_r = \mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$(2)\ \left(\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{irjr}(D^2 \times I)\right) \cap \left(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu\right) \text{ は連結}$$

ここで K^2 を二次元球面

$\left(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu\right) \cup \left(\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{irjr}(D^2 \times I)\right) - \mathring{T}$ とする。但し $T = \bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{irjr}(D^2 \times I)$であり $\mathring{T}$ は T の内部を表す。この時、K^2のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

2.2 定義（[1]）

$\mathcal{O} = \bigcup_{\mu=1}^{m} D^3_\mu$, $\mathcal{B} = \bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{irjr}(D^2 \times I)$ とおくとき$(\mathcal{O}, \mathcal{B})$のことを二次元リボン結び目$K^2$に対するmベースリボン表示(或いは単にリボン表示)と呼ぶ。また$\mathcal{O}$をベース、$\mathcal{B}$をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目K^2に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことをK^2のベース指数と呼び$b(K^2)$で表す。このときK^2は$b(K^2)$ベース二次元リボン結び目であるという。

2.3 定義（[1]）

$\ell_r = f^r_{irjr}(\{0\} \times I)$　$(r = 1, 2, \cdots, m-1)$とおく。但し、$\{0\}$はD^2 の中心点である。ここで各 ℓ_r が $\mathcal{O}$ に有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各 ℓ_rの方向に従ってa_{r1}, a_{r2}, $\cdots$, a_{rSr}とし$(\mathcal{O}, \mathcal{B})$のリボン交差と呼ぶ。但し各 ℓ_r の方向が O^2_i から O^2_j へ向かう方向とする。この時

$n = \sum_{r=1}^{m} s_r$をリボン表示のリボン交差数と呼び、$(\mathcal{O}, \mathcal{B})$はn交差リボン表示であるという。そうして$K^2$に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことをK^2の最小交差数(或いは単に交差数)と呼び$cr(K^2)$で表す。

2.4 定義

a_{r1}, a_{r2}, $\cdots$, a_{rSr}に対応して、s_r 個の文字からなる語 w_r をつくる。つくり方は ℓ_r が D^3_μ に点 $a_{rv}$$(v = 1, 2, \cdots, s_r)$で正の側から交わるとき、$w_r$ の v 番目の文字をx_μ、負の側から交わるときは同様 x^{-1}_μ とするものとする。このようにしてつくられた語 w_1, w_2, $\cdots$, w_{m-1} を利用してK^2の結び目群 $\pi_1(\mathbf{R}^4 - K^2)$の群表示を次の様に構成できる。

$$(*1)\quad [\, x_\mu ;\ \mu = 1, 2, \cdots, m \mid x_i w_r x^{-1}_j w^{-1}_r ;\ r = 1, 2, \cdots, m-1 \,]$$

但し各 x_μ は O^2_μ のメリディアン生成元とする([5])。以上の様な構成法でリボン表示$(\mathcal{O}, \mathcal{B})$から得られた群表示(*1)のことを$(\mathcal{O}, \mathcal{B})$に関連したリボン群表示と呼ぶ。また各 w_r のことをこのリボン群表示の語と呼ぶ。一方、リボン群表示(*1)からは、逆の手順でリボン表示$(\mathcal{O}, \mathcal{B})$を定められるので$(\mathcal{O}, \mathcal{B})$のことをリボン群表示(*1)に関連したリボン表示と呼ぶ。

３．定理の証明

最小交差数４のリボン結び目のうち、４ベースリボン表示が最小交差数４を実現するものを列挙する。

但し，ベースの繋がり方により，以下のように(i),(ii),(iii)の３つのタイプに分けてそれを行う。

(i) 次のリボン群表示 G_j に関連したリボン表示を$\mathcal{R}_j$とする。

$$G_j = [\, x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1 w_{j1} x^{-1}_2 w^{-1}_{j1},\ x_2 w_{j2} x^{-1}_3 w^{-1}_{j2},\ x_3 w_{j3} x^{-1}_4 w^{-1}_{j3} \,]$$

ここで w_{j1}、w_{j2}, w_{j3}, は８つの文字 x_1, x^{-1}_1, x_2, x^{-1}_2, x_3, x^{-1}_3, x_4, x^{-1}_4 のいずれかでつくられる，それぞれ１文字，２文字，１文字の語である。ここで８つの文字の優先順位をこの順であるとする。w_{j1}、w_{j2}, w_{j3}を繋げた４文字の語を辞書式順序ですべて並べ、[1], [2], [3], において列挙されたリボン表示と同じ二次元リボン結び目を表すリボン表示を省くと、次の３つが残る。但し，[3]の最後に掲載された $\mathcal{R}_{57}$ はそれまでに掲載済みのリボン表示であることがわかったので削除し，本論文でのリボン表示の番号付けは57から始めることにする。

$w_{57} = x_3, \ x_1 x_4^{-1}, \ x_2^{-1}$
$w_{58} = x_2, \ x_1^{-1} x_4^{-1}, \ x_2$
$w_{59} = x_3^{-1}, \ x_1^{-1} x_4, \ x_2$

一方、各G_jに対して［6］における二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式計算法を適用すると、容易にリボン表示 $\mathcal{R}_j$ の実現する二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式 Δ_j（mod$\pm t^{\alpha}$）が次のように求まる。

$\Delta_{57} = -2+3t-2t^2$
$\Delta_{58} = 1-2t-t^2+2t^3-t^4$
$\Delta_{59} = -2+3t-2t^2$

従って (i) のタイプに該当するリボン表示が最小交差数４を実現する二次元リボン結び目は３個である。

但し、$\mathcal{R}_{57}$ と $\mathcal{R}_{59}$ は互いに鏡像の関係にある。

(ii) 次のリボン群表示 G_j に関連したリボン表示を $\mathcal{R}_j$ とする。

$$G_j = [x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1 w_{j1} x_2^{-1} w_{j1}^{-1}, \ x_1 w_{j2} x_3^{-1} w_{j2}^{-1}, \ x_1 w_{j3} x_4^{-1} w_{j3}^{-1}]$$

ここで w_{j1}、w_{j2}, w_{j3} は８つの文字 x_1，x_1^{-1}，x_2, x_2^{-1}, x_3，x_3^{-1}，x_4，x_4^{-1} のいずれかでつくられる，それぞれ２文字，１文字，１文字の語である。ここで８つの文字の優先順位をこの順であるとする。w_{j1}、w_{j2}, w_{j3} を繋げた４文字の語を辞書式順序ですべて並べ，[1]，[2], [3], と上記 (i) において列挙されたものを除くと次の 16 個が残る。

$w_{60} = x_3x_1, \ x_4, \ x_2$
$w_{61} = x_3x_1, \ x_4, \ x_2^{-1}$
$w_{62} = x_3x_1, \ x_4^{-1}, \ x_2$
$w_{63} = x_3x_1, \ x_4^{-1}, \ x_2^{-1}$
$w_{64} = x_3x_1^{-1}, \ x_4, \ x_2$
$w_{65} = x_3x_1^{-1}, \ x_4, \ x_2^{-1}$
$w_{66} = x_3x_1^{-1}, \ x_4^{-1}, \ x_2$
$w_{67} = x_3x_1^{-1}, \ x_4^{-1}, \ x_2^{-1}$
$w_{68} = x_3^{-1}x_1, \ x_4, \ x_2$
$w_{69} = x_3^{-1}x_1, \ x_4, \ x_2^{-1}$
$w_{70} = x_3^{-1}x_1, \ x_4^{-1}, \ x_2$
$w_{71} = x_3^{-1}x_1, \ x_4^{-1}, \ x_2^{-1}$
$w_{72} = x_3^{-1}x_1^{-1}, \ x_4, \ x_2$
$w_{73} = x_3^{-1}x_1^{-1}, \ x_4, \ x_2^{-1}$
$w_{74} = x_3^{-1}x_1^{-1}, \ x_4^{-1}, \ x_2$
$w_{75} = x_3^{-1}x_1^{-1}, \ x_4^{-1}, \ x_2^{-1}$

一方、各 G_j に対して［6］における二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式計算法を適用すると、容易にリボン表示 $\mathcal{R}_j$ の実現する二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式 Δ_j（mod$\pm t^{\alpha}$）が次のように求まる。

$\Delta_{60} = -1+3t-3t^2+t^3-t^4$
$\Delta_{61} = 1-3t+3t^2-2t^3$
$\Delta_{62} = 1-3t+3t^2-2t^3$
$\Delta_{63} = -1+3t-4t^2+t^3$
$\Delta_{64} = -1+3t-4t^2+t^3$
$\Delta_{65} = 1-4t+3t^2-t^3$
$\Delta_{66} = 1-4t+3t^2-t^3$
$\Delta_{67} = -2+3t-3t^2+t^3$
$\Delta_{68} = 1-3t+3t^2-2$
$\Delta_{69} = -1+3t-4t^2+t^3$
$\Delta_{70} = -1+3t-4t^2+t^3$
$\Delta_{71} = 1-4t+3t^2-t^3$
$\Delta_{72} = 1-4t+3t^2-t^3$
$\Delta_{73} = -2+3t-3t^2+t^3$
$\Delta_{74} = -2+3t-3t^2+t^3$
$\Delta_{75} = -1+t-3t^2+3t^3-t^4$

従って (ii) のタイプに該当するリボン表示が最小交差数４を実現する二次元リボン結び目は高々 16 個である。

但し、$\mathcal{R}_{67}$ と $\mathcal{R}_{68}$，$\mathcal{R}_{69}$ と $\mathcal{R}_{66}$，$\mathcal{R}_{70}$ と $\mathcal{R}_{65}$，$\mathcal{R}_{71}$ と $\mathcal{R}_{64}$，$\mathcal{R}_{72}$ と $\mathcal{R}_{63}$，$\mathcal{R}_{73}$ と $\mathcal{R}_{62}$，$\mathcal{R}_{74}$ と $\mathcal{R}_{61}$，$\mathcal{R}_{75}$ と $\mathcal{R}_{60}$，は互いに鏡像の関係にある。

(iii) 次のリボン群表示 G_j に関連したリボン表示を $\mathcal{R}_j$ とする。

$$G_j = [x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1 w_{j1} x_2^{-1} w_{j1}^{-1}, \ x_2 w_{j2} x_3^{-1} w_{j2}^{-1}, \ x_3 w_{j3} x_4^{-1} w_{j3}^{-1}]$$

ここで w_{j1}、w_{j2}, w_{j3} は８つの文字 x_1，x_1^{-1}，x_2, x_2^{-1}, x_3，x_3^{-1}，x_4，x_4^{-1} のいずれかでつくられる，それぞれ２文字，１文字，１文字の語である。ここで８つの文字の優先順位をこの順であるとする。w_{j1}、w_{j2}, w_{j3} を繋げた４文字の語を辞書式順序ですべて並べ，[1]，[2], [3], と上記 (i)，(ii) において列挙されたものを除くと次の 16 個が残る。

$w_{76} = x_2x_3, \ x_4, \ x_2$
$w_{77} = x_2x_3, \ x_4, \ x_2^{-1}$
$w_{78} = x_2x_3, \ x_4^{-1}, \ x_2$

$w_{79} = x_2 x_3, \ x_4^{-1}, \ x_2^{-1}$

$w_{80} = x_2 x_3^{-1}, \ x_4, \ x_2$

$w_{81} = x_2 x_3^{-1}, \ x_4, \ x_2^{-1}$

$w_{82} = x_2 x_3^{-1}, \ x_4^{-1}, \ x_2$

$w_{83} = x_2 x_3^{-1}, \ x_4^{-1}, \ x_2^{-1}$

$w_{84} = x_2^{-1} x_3, \ x_4, \ x_2$

$w_{85} = x_2^{-1} x_3, \ x_4, \ x_2^{-1}$

$w_{86} = x_2^{-1} x_3, \ x_4^{-1}, \ x_2$

$w_{87} = x_2^{-1} x_3, \ x_4^{-1}, \ x_2^{-1}$

$w_{88} = x_2^{-1} x_3^{-1}, \ x_4, \ x_2$

$w_{89} = x_2^{-1} x_3^{-1}, \ x_4, \ x_2^{-1}$

$w_{90} = x_2^{-1} x_3^{-1}, \ x_4^{-1}, \ x_2$

一方、各 G_j に対して［6］における二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式計算法を適用すると、容易にリボン表示 $\mathcal{R}_j$ の実現する二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式 Δ_j (mod$\pm t^{\alpha}$）が次のように求まる。

$\Delta_{76} = -1+2t-4t^2+3t^3-t^4$

$\Delta_{77} = -3+4t-3t^2+t^3$

$\Delta_{78} = -1+3t-3t^2+3t^3-t^4$

$\Delta_{79} = -1+2t-4t^2+3t^3-t^4$

$\Delta_{80} = -2+4t-4t^2+t^3$

$\Delta_{81} = 1-5t+4t^2-t^3$

$\Delta_{82} = 2-5t+3t^2-t^3$

$\Delta_{83} = -1+3t-5t^2+2t^3$

$\Delta_{84} = -2+5t-3t^2+t^3$

$\Delta_{85} = 1-3t+5t^2-2t^3$

$\Delta_{86} = 1-4t+5t^2-t^3$

$\Delta_{87} = -1+4t-4t^2+2t^3$

$\Delta_{88} = -1+3t-4t^2+2t^3-t^4$

$\Delta_{89} = -1+3t-3t^2+3t^3-t^4$

$\Delta_{90} = 1-3t+4t^2-t^3$

$\Delta_{91} = -1+3t-4t^2+2t^3-t^4$

従って (iii) のタイプに該当するリボン表示が最小交差数 4 を実現する二次元リボン結び目は高々 16 個である。

但し、$\mathcal{R}_{84}$ と $\mathcal{R}_{83}$, $\mathcal{R}_{85}$ と $\mathcal{R}_{82}$, $\mathcal{R}_{86}$ と $\mathcal{R}_{81}$,
$\mathcal{R}_{87}$ と $\mathcal{R}_{80}$, $\mathcal{R}_{88}$ と $\mathcal{R}_{79}$, $\mathcal{R}_{89}$ と $\mathcal{R}_{78}$,
$\mathcal{R}_{77}$ と $\mathcal{R}_{90}$, $\mathcal{R}_{76}$ と $\mathcal{R}_{91}$, は互いに鏡像の関係にある。

（証了）

参考文献

［1］Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* **10**（2001）, 999-1003.

［2］安田智之，最小交差数４の二次元リボン結び目、奈良工業高等専門学校研究紀要題 44 号（2008 年３月）, 69 - 72.

［3］安田智之，最小交差数４の二次元リボン結び目Ⅱ、奈良工業高等専門学校研究紀要題 44 号（2009 年３月），59 - 61.

［4］Yasuda,T., An evaluation of the crossing number on ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* **15**（2006）, 1- 9.

［5］Yajima, T., On characterization of knot groups of some spheres in R , *Osaka J. Math.* **6**（1969）, 435-446.

［6］Yasuda,T., A presentation and genus for ribbon n-knots, *Kobe J. Math.* **6**（1989）, 71-88.