双対半ドモルガン代数のシーケントによる形式化

荒金　憲一

Sequential formulations for dual semi-De Morgan algebras

Kenichi ARAGANE

最小元 0 と最大元 1 をもつ分配束 (bounded distributive lattice(BDL)：$F1$~$F7°$ を満たす) で 3 重否定律 ($F8, F8°$ つまり $\neg\neg\neg x = \neg x$) と半ド・モルガン律 ($F9$, $F9°$) と 0, 1 についての性質 ($F10$, $F10°$) を満たす代数系が [7] で定義されている双対半ド・モルガン代数 (dual semi-De Morgan algebra(DSDMA)：[2] の $\mathbb{MP}\tilde{\mathbb{P}}$ と $\mathbb{M}\tilde{\mathbb{P}}$ の間にある) である．つまり半ド・モルガン代数 ([5]) と双対な代数系である . 本論文では , 双対半ド・モルガン代数で成り立つ性質を調べる．そして双対半ド・モルガン代数と演繹的に同値な，G.Gentzen の方法 ([6]) でのシーケント (式) による形式的体系 GDSDMA を考える.

§1　ワード

[3], [4], [5] と同様にワードを定義する．

[**定義 1**]　(ワードの定義)

(1)　定数 0, 1 はワードである.

(2)　変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ はワードである.

(3)　x と y がワードのとき $x \wedge y$, $x \vee y$, $\neg x$ はワードである.

(4)　以上の (1), (2), (3) によって構成された記号列のみがワードである.

ワード全体の集合を A とし，2 項演算 $\vee, \wedge$ と 1 項演算 $\neg$ をもつ代数系 $\mathbf{A} = (A\,;\,0,\ 1,\ \vee,\ \wedge,\ \neg)$ を考える.

§2　双対半ド・モルガン代数 (DSDMA)

[**定義 2**]　(DSDMA の定義)

A の任意の元 x, y, z に対して, 次の $F1 \sim F10°$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{A}$ を双対半ド・モルガン代数 (DSDMA) とよぶ ([7]).

$F1$	$x \wedge 0 = 0$	$F1°$	$x \vee 1 = 1$
$F2$	$x \wedge 1 = x$	$F2°$	$x \vee 0 = x$
$F3$	$x \wedge x = x$	$F3°$	$x \vee x = x$
$F4$	$x \wedge y = y \wedge x$	$F4°$	$x \vee y = y \vee x$
$F5$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$F5°$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$F6$	$x \wedge (x \vee y) = x$	$F6°$	$x \vee (x \wedge y) = x$
$F7$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$F7°$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$F8$	$\neg x \wedge \neg\neg\neg x = \neg x$	$F8°$	$\neg x \vee \neg\neg\neg x = \neg x$
$F9$	$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$	$F9°$	$\neg\neg(x \vee y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y$
$F10$	$\neg 0 = 1$	$F10°$	$\neg 1 = 0$

[**定義 3**]　(不等式の定義)
x, y を A の任意の元とする．$x \wedge y = x$ が成り立つとき，$x \leq y$ と書く．

[1], [3], [4], [5] と同様にして, 次の定理が成り立つ.

[**定理 1**]　代数系 $\mathbf{A}$ が 双対半ド・モルガン代数 (DSDMA) であり (つまり $F1$〜$F10°$ が成り立つ), かつ定義 3 により $x \leq y$ が定義される $\Longleftrightarrow$ A の任意の元 x, y, z に対して $\mathbf{A}$ で次の $T1 \sim T12°$ が成り立つ.

$T1$	$x \leq x$		
$T2$	$x \leq y,\ y \leq x \Longleftrightarrow x = y$		
$T3$	$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$		
$T4$	$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$		
$T5$	$0 \leq x$	$T5°$	$x \leq 1$
$T6$	$x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y$	$T6°$	$x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y$
$T7$	$z \leq x,\ z \leq y \Longrightarrow z \leq x \wedge y$	$T7°$	$x \leq z,\ y \leq z \Longrightarrow x \vee y \leq z$
$T8$	$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$T8°$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$
$T9$	$x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x$		
$T10$	$\neg x \leq \neg\neg\neg x$	$T10°$	$\neg\neg\neg x \leq \neg x$
$T11$	$\neg(x \wedge y) \leq \neg x \vee \neg y$	$T11°$	$\neg\neg(x \vee y) \leq \neg\neg x \vee \neg\neg y$
$T12$	$\neg 1 \leq x$	$T12°$	$x \leq \neg 0$

(証明)
$\Longrightarrow$:
$T1$〜$T8°$ と $T12$ は [3] の定理 1 の証明と同じである. $T10$ と $T10°$ と $T12°$ は [5] の定理 1 の証明と同じである.
$T9$: $x \leq y$ とすると定義 3 より $x \wedge y = x$. この両辺に否定をとると $F9$ から $\neg x \vee \neg y = \neg x$ で $F4°$ と $T4$ から $\neg y \leq \neg x$ が成り立つ.
$T11$: $F9$ と $T2$ から成り立つ.
$T11°$: $F9°$ と $T2$ から成り立つ.
$\Longleftarrow$:
定義 3 により $x \leq y$ が定義されることと $F1$〜$F7°$ と $F10°$ は [3] の定理 1 の証明と同じである. $F8$ と $F8°$ と $F10$ は [5] の定理 1 の証明と同じである.
$F9$: $T6$ で $T9$ を使うと $\neg x \leq \neg(x \wedge y)$, $\neg y \leq \neg(x \wedge y)$. これらに $T7°$ を使うと $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y)$. これと $T11$ に $T2$ を使って $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ が成り立つ.
$F9°$: $T6°$ で $T9$ を 2 回使うと $\neg\neg x \leq \neg\neg(x \vee y)$, $\neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y)$. これらに $T7°$ を使うと $\neg\neg x \vee \neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y)$. これと $T11°$ に $T2$ を使って $\neg\neg(x \vee y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y$ が成り立つ.
(証明終)

次の (1), (2), (3) は [5] の注意 1 と同じであり, (1)°, (2)°, (3)° が双対的に成り立つ.

[**注意 1**]　束 ($T1 \sim T4$ と $T6 \sim T7°$ が成り立つ) において, 次のことが成り立つ.
(1) $[T10(\neg x \leq \neg\neg\neg x)$ かつ $(x \leq \neg y \Longrightarrow \neg\neg y \leq \neg x)] \Longleftrightarrow (x \leq \neg\neg y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)$
(2) $\neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y \Longleftrightarrow T9(x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)$
(3) $\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x \wedge \neg\neg y \Longleftrightarrow (x \leq y \Longrightarrow \neg\neg x \leq \neg\neg y)$
(1)° $[T10°(\neg\neg\neg x \leq \neg x)$ かつ $(\neg x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg\neg x)] \Longleftrightarrow (\neg\neg x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)$
(2)° $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y) \Longleftrightarrow T9(x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)$
(3)° $\neg\neg x \vee \neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y) \Longleftrightarrow (x \leq y \Longrightarrow \neg\neg x \leq \neg\neg y)$

(証明)

(1)$^\circ$: $\Longrightarrow$: $\neg\neg x \le y$ とすると仮定から $\neg y \le \neg\neg\neg x$ であり, $\neg\neg\neg x \le \neg x$ より $T3$ から $\neg y \le \neg x$ が成り立つ. $\Longleftarrow$: $T1$ より $\neg\neg x \le \neg\neg x$ で仮定から $\neg\neg\neg x \le \neg x$ が成り立つ. 次に $\neg x \le y$ とする. $\neg\neg\neg x \le \neg x \le y$ より仮定から $\neg y \le \neg\neg x$ が成り立つ.

(2)$^\circ$: $\Longrightarrow$: $x \le y$ とすると定義 3 から $x \wedge y = x$. これを仮定の不等式の右辺に代入すると $\neg x \vee \neg y \le \neg x$. また $T6^\circ$ より $\neg y \le \neg x \vee \neg y$ で $T3$ から $\neg y \le \neg x$ が成り立つ. $\Longleftarrow$: $T6$ の $x \wedge y \le x$, $x \wedge y \le y$ で仮定を使うと $\neg x \le \neg(x \wedge y)$, $\neg y \le \neg(x \wedge y)$. $T7^\circ$ を使って $\neg x \vee \neg y \le \neg(x \wedge y)$ が成り立つ.

(3)$^\circ$: $\Longrightarrow$: $x \le y$ とすると $T4$ から $x \vee y = y$ で $\neg\neg(x \vee y) = \neg\neg y$. これを仮定の不等式に代入して $\neg\neg x \vee \neg\neg y \le \neg\neg y$. $T6^\circ$ より $\neg\neg x \le \neg\neg x \vee \neg\neg y$ で $T3$ から $\neg\neg x \le \neg\neg y$ が成り立つ. $\Longleftarrow$: $T6^\circ$ より $x \le x \vee y$, $y \le x \vee y$ で仮定を使うと $\neg\neg x \le \neg\neg(x \vee y)$, $\neg\neg y \le \neg\neg(x \vee y)$. これらに $T7^\circ$ を使って $\neg\neg x \vee \neg\neg y \le \neg\neg(x \vee y)$ が成り立つ. (証明終)

また, 次の (1), (2), (3) は [5] の注意 2 と同じであり, (3)$^\circ$ が双対的に成り立つ.

[**注意 2**]　束において, 次のことが成り立つ.

(1) $[T9(x \le y \Longrightarrow \neg y \le \neg x)$ かつ $\neg\neg\neg x = \neg x] \Longrightarrow [T9^\circ(\neg\neg x \le \neg\neg y \Longleftrightarrow \neg y \le \neg x)]$

(2) $[T9^\circ$ かつ $T10(\neg x \le \neg\neg\neg x)] \Longrightarrow \neg\neg\neg x = \neg x$

(3) $$\begin{cases} \neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y \\ \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\ \neg\neg\neg x = \neg x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ① \neg(x \wedge y) = \neg(\neg\neg x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg(\neg x \vee \neg y) \\ ② \neg\neg\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\ ③ \neg(\neg x \vee \neg y) = \neg\neg(x \wedge y) \end{cases}$$

(3)$^\circ$ $$\begin{cases} (F9) \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y \\ (F9^\circ) \neg\neg(x \vee y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y \\ \neg\neg\neg x = \neg x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ①^\circ \neg(x \vee y) = \neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg(\neg x \wedge \neg y) \\ ②^\circ \neg\neg\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y \\ ③^\circ \neg(\neg x \wedge \neg y) = \neg\neg(x \vee y) \end{cases}$$

(証明)

(3)$^\circ$: $\Longrightarrow$: $\neg(x \vee y) = \neg\neg\neg(x \vee y) = \neg(\neg\neg(x \vee y)) = \neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg(\neg x \wedge \neg y)$ より ①$^\circ$ が成り立つ. 次に $\neg\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg(\neg x \vee \neg y) = \neg\neg\neg x \vee \neg\neg\neg y = \neg x \vee \neg y$ より ②$^\circ$ が成り立つ. また $\neg(\neg x \wedge \neg y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y = \neg\neg(x \vee y)$ より ③$^\circ$ が成り立つ.

$\Longleftarrow$: 仮定 ①$^\circ$ または ②$^\circ$ で y を x にすると $F3, F3^\circ$ から $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ. 次に $\neg(x \wedge y) = \neg\neg\neg(x \wedge y) \overset{②^\circ}{=} \neg x \vee \neg y$. また $\neg\neg(x \vee y) \overset{③^\circ}{=} \neg(\neg x \wedge \neg y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y$. (証明終)

さらに, 次のことが成り立つ.

[**注意 3**]　束において, 次のことが成り立つ.

(1) $[\neg x \vee \neg y \le \neg(x \wedge y)$ かつ $\neg x = \neg\neg\neg x] \Longrightarrow [T9^\circ(\neg\neg x \le \neg\neg y \Longleftrightarrow \neg y \le \neg x)$ かつ $(x \le \neg\neg y \Longrightarrow \neg y \le \neg x)]$

(2) $(\neg\neg x \le \neg\neg y \Longrightarrow \neg y \le \neg x) \Longrightarrow (\neg x \le \neg\neg\neg x \Longleftrightarrow \neg\neg\neg x \le \neg x)$

(3) $(x \le \neg\neg y \Longrightarrow \neg y \le \neg x) \Longrightarrow \neg x \le \neg\neg\neg x$

(証明)

(1) : $\neg\neg x \le \neg\neg y$ とすると定義 3 から $\neg\neg x \wedge \neg\neg y = \neg\neg x$ で $\neg(\neg\neg x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg\neg x$. 仮定より $\neg\neg\neg x \vee \neg\neg\neg y \le \neg(\neg\neg x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg\neg x = \neg x$. $T6^\circ$ より $\neg y = \neg\neg\neg y \le \neg\neg\neg x \vee \neg\neg\neg y$ から $\neg y \le \neg x$ が成り立つ. 注意 1 の (2)$^\circ$ より $T9$ が成り立つので $\neg y \le \neg x \Longrightarrow \neg\neg x \le \neg\neg y$ が成り立つ. 次に, $x \le \neg\neg y$ とすると定義 3 から $x \wedge \neg\neg y = x$ で $\neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x$. 仮定より $\neg x \vee \neg\neg\neg y \le \neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x$ で $\neg y = \neg\neg\neg y \le \neg x \vee \neg\neg\neg y$ から $\neg y \le \neg x$ が成り立つ.

(2) : $\neg x \le \neg\neg\neg x$ とする. x を $\neg x$ にすると $\neg\neg x \le \neg\neg\neg\neg x$ で仮定から $\neg\neg\neg x \le \neg x$ が成り立つ. 逆の場合も同様である.

(3) ： $T1$ より $\neg\neg x \leq \neg\neg x$ で仮定から $\neg x \leq \neg\neg\neg x$ が成り立つ. (証明終)

§3　DSDMA のシーケントによる形式的体系 GDSDMA

[3], [4], [5] と同様にシーケントの定義をする.

[**定義 4**]　(シーケント (式) の定義)
ワードの有限列をギリシア大文字 Γ, Δ などで表す. ワードの有限列 $a_1, \ldots, a_m$ を Γ とし, $b_1, \ldots, b_n$ を Δ とするとき, DSDMA での不等式 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ をシーケント (式) $\Gamma \longrightarrow \Delta$ で表す. ただし, Γ が空のとき ($\Gamma = \emptyset$ と書く), $1 \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ とし, $\Delta = \emptyset$ のときは $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq 0$ とする. $\Gamma = \Delta = \emptyset$ の場合は考えない.

このとき, 双対半ド・モルガン代数 (DSDMA) のシーケントによる形式的体系 GDSDMA を [3], [4], [5] と同様に次のように定義する.

[**定義 5**]　(GDSDMA の定義)

[1]　始式

$$(B1)\ a \longrightarrow a \quad (B2)\ 0 \longrightarrow \Delta \quad (B3)\ \Gamma \longrightarrow 1 \quad (B4)\ \neg a \longrightarrow \neg\neg\neg a \quad (B5)\ \neg\neg\neg a \longrightarrow \neg a$$

[2]　推論規則

(1) 構造に関する推論規則 ：

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{a, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (w \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}\ (\longrightarrow w)$$

$$\frac{a, a, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (c \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}\ (\longrightarrow c)$$

$$\frac{\Gamma_1, a, b, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1, b, a, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\ (e \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, a, b, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, b, a, \Delta_2}\ (\longrightarrow e)$$

$$\frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1, a \qquad a, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2}\ (cut)$$

(2) 論理記号に関する推論規則 ：

$$\frac{a, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge_1 \longrightarrow) \qquad \frac{b, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge_2 \longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \vee b}\ (\longrightarrow \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, b}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \vee b}\ (\longrightarrow \vee_2)$$

$$\frac{a, \Gamma \longrightarrow \Delta \quad b, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \vee b, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\vee \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \quad \Gamma \longrightarrow \Delta, b}{\Gamma \longrightarrow \Delta, a \wedge b}\ (\longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{a \longrightarrow b}{\neg b \longrightarrow \neg a}\ (\neg \longrightarrow \neg)$$

$$\frac{\neg a \longrightarrow \Gamma \qquad \neg b \longrightarrow \Gamma}{\neg(a \wedge b) \longrightarrow \Gamma}\ (\neg \longrightarrow) \qquad \frac{\neg\neg a \longrightarrow \Gamma \qquad \neg\neg b \longrightarrow \Gamma}{\neg\neg(a \vee b) \longrightarrow \Gamma}\ (\neg\neg \longrightarrow)$$

[5] と同様に次のことが成り立つ.

[注意 4]　次の 2 つの同値性が成り立つ.

$$(B4) \iff \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg a}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg\neg\neg a} \qquad\qquad (B5) \iff \frac{\neg a, \Gamma \longrightarrow \Delta}{\neg\neg\neg a, \Gamma \longrightarrow \Delta}$$

§4　DSDMA と GDSDMA の演繹的同値性

[3], [4], [5] と同様に次の定義をする.

[定義 6]　($\vdash$ の定義)
シーケント $\Gamma \longrightarrow \Delta$ が GDSDMA で証明可能であるとき, $\vdash \Gamma \longrightarrow \Delta$ と書く.

[定義 7]　($\models$ の定義)
不等式 $a \leq b$ が DSDMA で成り立つとき $\models a \leq b$ と書く.

[定義 8]　(DSDMA での等号の定義)
a, b をワードとする. $\vdash a \longrightarrow b$ かつ $\vdash b \longrightarrow a$ のとき $a \equiv b$ とすれば, $\equiv$ は 同値関係である. そこで $A/_{\equiv}$ (A の $\equiv$ による商集合) をあらためて A とし, $\equiv$ を $=$ とみなしたものを DSDMA での等号とする. (つまり, リンデンバウム代数 (Lindenbaum algebra) を考える.)

このとき, [3], [4], [5] と同様にして, 次の 2 つの定理が成り立つ.

[定理 2]　a, b をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\models a \leq b \qquad \text{ならば} \qquad \vdash a \longrightarrow b$$

(証明)
DSDMA のすべての公理 ($F1 \sim F10^{\circ}$) が GDSDMA で証明可能であることを示せばよいが, これらと同値な $T1 \sim T12^{\circ}$ が GDSDMA で証明可能であることを示す.
$T1 \sim T9$ は [3] の定理 2 の証明と同じである. $T10, T10^{\circ}, T12, T12^{\circ}$ は [5] の定理 2 の証明と同じである.
$T11$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg x \longrightarrow \neg x}{\neg x \longrightarrow \neg x, \neg y} \qquad \dfrac{\neg y \longrightarrow \neg y}{\neg y \longrightarrow \neg x, \neg y}}{\neg(x \wedge y) \longrightarrow \neg x, \neg y}}{\neg(x \wedge y) \longrightarrow \neg x \vee \neg y}$$

$T11^{\circ}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg x \longrightarrow \neg\neg x}{\neg\neg x \longrightarrow \neg\neg x, \neg\neg y} \qquad \dfrac{\neg\neg y \longrightarrow \neg\neg y}{\neg\neg y \longrightarrow \neg\neg x, \neg\neg y}}{\neg\neg(x \vee y) \longrightarrow \neg\neg x, \neg\neg y}}{\neg\neg(x \vee y) \longrightarrow \neg\neg x \vee \neg\neg y}$$

(証明終)

[定理 3]　$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\vdash a_1, \ldots, a_m \longrightarrow b_1, \ldots, b_n \qquad \text{ならば} \qquad \models a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$$

(証明)

Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ を x で表す. Δ が $b_1, \ldots, b_n$ のとき $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を y で表す. GDSDMA の始式 $(B1)$, $(B2)$, $(B3)$, $(B4)$, $(B5)$ はそれぞれ $T1$, $T5$, $T5^{\circ}$, $T10$, $T10^{\circ}$ から DSDMA で成り立つ. 次に GDSDMA の各推論規則の上式 (上のシーケント) に対応する不等式が DSDMA で成り立つと仮定するとき, 下式に対応する不等式が DSDMA で成り立つことを示せばよい.

$(w \longrightarrow)$〜$(\longrightarrow \wedge)$ は [3] の定理 3 の証明と同じである.

$(\neg \longrightarrow \neg)$: $\models a \leq b$ とすると $T9$ から $\models \neg b \leq \neg a$ が成り立つ.

$(\neg \longrightarrow)$: $\models \neg a \leq x$, $\models \neg b \leq x$ とすると $T7^{\circ}$ より $\models \neg a \vee \neg b \leq x$. $T11$ より $\models \neg(a \wedge b) \leq \neg a \vee \neg b$ で $T3$ を使って $\models \neg(a \wedge b) \leq x$ が成り立つ.

$(\neg\neg \longrightarrow)$: $\models \neg\neg a \leq x$, $\models \neg\neg b \leq x$ とすると $T7^{\circ}$ より $\models \neg\neg a \vee \neg\neg b \leq x$. $T11^{\circ}$ より $\models \neg\neg(a \vee b) \leq \neg\neg a \vee \neg\neg b$ で $T3$ を使って $\models \neg\neg(a \vee b) \leq x$ が成り立つ. (証明終)

以上により DSDMA と GDSDMA が演繹的に同値であることがわかる.

参考文献

[1] 荒金憲一, MS-algebra に双対な代数系について, 奈良高専研究紀要 28(1993), 105–111.

[2] 荒金憲一, ファジイ代数に関連する代数系について, 奈良高専研究紀要 31(1996), 81–89.

[3] 荒金憲一, MS 代数とストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 33(1998), 119–127.

[4] 荒金憲一, 準ストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 40(2005), 87–94.

[5] 荒金憲一, 半ド・モルガン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 41(2006), 109–114.

[6] G.Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift 39(1935), 176–216, 405–431.

[7] H.P. Sankappanavar, *Semi-De Morgan algebaras*, The Journal of Symbolic Logic 52(1987), 712–724.