準ストーン代数*のシーケントによる形式化

荒 金 憲 一

Sequential formulations for quasi-Stone algebras*

Kenichi ARAGANE

最小元 0 と最大元 1 をもつ分配束 (bounded distributive lattice : BDL) で半２重否定律 $((F8, F8^\circ) x \leq \neg\neg x)$ と $\vee$ に関するド・モルガン律 $((F9^\circ)\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y)$ と $\wedge$ に関するド・モルガン律 $(\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y)$ を弱めた形 $((F9)\neg(x \wedge \neg y) = \neg x \vee \neg\neg y)$ と最小元・最大元に関する補元律 $((F10)\neg 0 = 1, (F10^\circ)\neg 1 = 0)$ と矛盾律 $((F11) x \wedge \neg x = 0)$ を満たす代数系が [2], [4] で定義されている準ストーン代数 (quasi-Stone algebra(QSA)) である．本論文では上の $F9$ をそれと同値な $(F9^*)\neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg y$ で置き換えた準ストーン代数*(quasi-Stone algebra*(QSA*)) を考察する．そして準ストーン代数*と演繹的に同値な，G. Gentzen の方法 ([3]) でのシーケント (式) による形式的体系 GQSA* を考える．

§ 1　準ストーン代数*(QSA*)

[1], [2] と同様にワードを定義し, ワード全体の集合を A として, 2 項演算 $\vee, \wedge$ と 1 項演算 $\neg$ をもつ代数系 $\mathbf{A} = (A\,;\, 0,\ 1,\ \vee,\ \wedge,\ \neg)$ を考える.

[定義 **1**]　(QSA* の定義)
A の任意の元 x, y, z に対して, 次の $F1 \sim F11$ が成り立つとき, 代数系 $\mathbf{A}$ を準ストーン代数*(QSA*) とよぶ.

$F1$	$x \wedge 0 = 0$	$F1^\circ$	$x \vee 1 = 1$
$F2$	$x \wedge 1 = x$	$F2^\circ$	$x \vee 0 = x$
$F3$	$x \wedge x = x$	$F3^\circ$	$x \vee x = x$
$F4$	$x \wedge y = y \wedge x$	$F4^\circ$	$x \vee y = y \vee x$
$F5$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	$F5^\circ$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$F6$	$x \wedge (x \vee y) = x$	$F6^\circ$	$x \vee (x \wedge y) = x$
$F7$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$F7^\circ$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$F8$	$x \wedge \neg\neg x = x$	$F8^\circ$	$x \vee \neg\neg x = \neg\neg x$
$F9^*$	$\neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg y$	$F9^\circ$	$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
$F10$	$\neg 0 = 1$	$F10^\circ$	$\neg 1 = 0$
$F11$	$x \wedge \neg x = 0$		

[定義 **2**]　(不等式の定義)
x, y を A の任意の元とする．$x \wedge y = x$ が成り立つとき，$x \leq y$ と書く.

[1], [2] と同様にして, 次の定理が成り立つ.

[定理 **1**]　代数系 $\mathbf{A}$ が 準ストーン代数*(QSA*) であり (つまり $F1 \sim F11$ が成り立つ), かつ定義 2 により $x \leq y$ が定義される $\Longleftrightarrow$ A の任意の元 x, y, z に対して $\mathbf{A}$ で次の $T1 \sim T13$ が成り立つ.

$T1$	$x \leq x$		
$T2$	$x \leq y,\ y \leq x \Longleftrightarrow x = y$		
$T3$	$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$		
$T4$	$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$		
$T5$	$0 \leq x$	$T5^\circ$	$x \leq 1$

$T6$	$x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y$	$T6^\circ$	$x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y$
$T7$	$z \leq x,\ z \leq y \Longrightarrow z \leq x \wedge y$	$T7^\circ$	$x \leq z,\ y \leq z \Longrightarrow x \vee y \leq z$
$T8$	$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$T8^\circ$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$
$T9^*$	$x \leq \neg\neg y \Longleftrightarrow \neg y \leq \neg x$		
$T10$	$x \leq \neg\neg x$		
$T11$	$\neg(x \wedge \neg\neg y) \leq \neg x \vee \neg y$	$T11^\circ$	$\neg x \wedge \neg y \leq \neg(x \vee y)$
$T12$	$\neg 1 \leq x$		
$T13$	$x \wedge \neg x \leq 0$		

(証明)

$\Longrightarrow$:

$T1$〜$T8^\circ$ と $T10$ と $T11^\circ$ と $T12$ は [1] の定理 1 の証明と同じである.

$T9^*$: $\Longrightarrow$: $x \leq \neg\neg y$ とすると 定義 2 より $x \wedge \neg\neg y = x$. この両辺に否定をとると $F9^*$ から $\neg x \vee \neg y = \neg x$ で $T4$ から $\neg y \leq \neg x$. $\Longleftarrow$: $\neg y \leq \neg x$ とすると $T10$ と $T3$ より $\neg y \leq \neg\neg\neg x$ で上の $\Longrightarrow$ を使うと $x \leq \neg\neg x \leq \neg\neg y$ から $x \leq \neg\neg y$ が成り立つ.

$T11$: $F9^*$ と $T2$ から成り立つ.

$T13$: $F11$ と $T2$ から成り立つ.

$\Longleftarrow$: 定義 2 により $x \leq y$ が定義されることと $F1$〜$F8^\circ$ と $F10^\circ$ は [1] の定理 1 の証明と同じである.

$F9^*$: $T6$ と $T10$ より $x \wedge \neg\neg y \leq x \leq \neg\neg x$, $x \wedge \neg\neg y \leq \neg\neg y$ で $T9^*$ を使うと $\neg x \leq \neg(x \wedge \neg\neg y)$, $\neg y \leq \neg(x \wedge \neg\neg y)$. これらに $T7^\circ$ を使うと $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge \neg\neg y)$. これと $T11$ に $T2$ を使って $\neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg y$ が成り立つ.

$F9^\circ$: $T6^\circ$ と $T10$ より $x \leq x \vee y \leq \neg\neg(x \vee y)$, $y \leq x \vee y \leq \neg\neg(x \vee y)$ で $T9^*$ を使うと $\neg(x \vee y) \leq \neg x$, $\neg(x \vee y) \leq \neg y$. これらに $T7$ を使うと $\neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y$. これと $T11^\circ$ に $T2$ を使って $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ が成り立つ.

$F10$: $T5^\circ$ より $\neg 0 \leq 1$. また $T5$ と $T10$ から $0 \leq \neg 1 \leq \neg\neg\neg 1$ で $T9^*$ を使うと $1 \leq \neg\neg 1 \leq \neg 0$. よって $T2$ から $\neg 0 = 1$ が成り立つ.

$F11$: [2] の定理 1 の証明と同様に $T5, T13, T2$ から成り立つ.

(証明終)

[1] の注意 3 と同様に次の単調性が成り立つ.

[注意 **1**]　束 ($T1$ 〜 $T4$ と $T6$ 〜 $T7^\circ$ が成り立つ) において, 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $x \leq y,\ u \leq v \Longrightarrow x \wedge u \leq y \wedge v$　($\wedge$ についての単調性)

(2) $x \leq y,\ u \leq v \Longrightarrow x \vee u \leq y \vee v$　($\vee$ についての単調性)

[2] と同様に次のことが成り立つ.

[注意 **2**]　BDL において, 次の (1)〜(6) が成り立つ.

(1) $(T9^*)(x \leq \neg\neg y \Longleftrightarrow \neg y \leq \neg x) \Longrightarrow (x \leq \neg\neg x$ かつ $\neg\neg\neg x = \neg x)$

(2) $(T9^*) \Longleftrightarrow [x \leq \neg\neg x$ かつ $(x \leq y \Longrightarrow \neg y \leq \neg x)]$

(3) $(T9^*) \Longleftrightarrow [x \leq \neg\neg x$ かつ $\neg(x \wedge \neg\neg y) \geq \neg x \vee \neg y]$

(4) $(T9^*) \Longleftrightarrow [x \leq \neg\neg x$ かつ $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y]$

(5) $[(T9^*)$ かつ $x \wedge \neg x = 0$ かつ $\neg x \vee \neg\neg x = 1] \Longrightarrow \neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg y$

(6) $\neg x \vee \neg\neg x = 1$ が成り立つとき

$[(T9^*)$ かつ $x \wedge \neg x = 0] \Longleftrightarrow [x \leq \neg\neg x$ かつ $\neg 0 = 1$ かつ $(x \wedge \neg y = 0 \Longleftrightarrow \neg y \leq \neg x)]$

(証明)

(1) : $T1$ より $\neg x \leq \neg x$ で仮定 $T9^*$ の $\Longleftarrow$ を使って $x \leq \neg\neg x$ が成り立つ. 次に $x \leq \neg\neg x$ で x を $\neg x$ にすれば $\neg x \leq \neg\neg\neg x$. さらに $x \leq \neg\neg x \leq \neg\neg\neg\neg x$ で仮定 $T9^*$ の $\Longrightarrow$ から $\neg\neg\neg x \leq \neg x$. よって $T2$ から $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ.

(2) : $\Longrightarrow$: (1) より $x \leq \neg\neg x$ が成り立つ. $x \leq y$ とすると $x \leq y \leq \neg\neg y$ で仮定より $\neg y \leq \neg x$ が成り

立つ. $\Longleftarrow$: $x \leq \neg\neg y$ とすると仮定より $\neg\neg\neg y \leq \neg x$ で $\neg y \leq \neg\neg\neg y \leq \neg x$ から $\neg y \leq \neg x$ が成り立つ. 次に $\neg y \leq \neg x$ とすると仮定より $\neg\neg x \leq \neg\neg y$ で $x \leq \neg\neg x \leq \neg\neg y$ から $x \leq \neg\neg y$ が成り立つ.

(3) : $\Longrightarrow$: (1) より $x \leq \neg\neg x$ が成り立つ. 上の定理 1 の $\Longleftarrow$ での $F9^*$ の証明と同じで $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge \neg\neg y)$ が成り立つ. $\Longleftarrow$: $x \leq \neg\neg y$ とすると定義 2 から $x \wedge \neg\neg y = x$ で両辺に否定をとり, 仮定を使うと $\neg x \vee \neg y \leq \neg x$. また $T6^\circ$ から $\neg x \leq \neg x \vee \neg y$ で $T2$ を使って $\neg x \vee \neg y = \neg x$. よって $T4$ から $\neg y \leq \neg x$ が成り立つ. 次に $\neg y \leq \neg x$ とすると $\neg y \leq \neg\neg\neg x$ で $\neg y \wedge \neg\neg\neg x = \neg y$. 両辺に否定をとり, 仮定を使うと $\neg\neg y \vee \neg\neg x \leq \neg\neg y$. $T6^\circ$ より $\neg\neg y \leq \neg\neg y \vee \neg\neg x$ から $\neg\neg y \vee \neg\neg x = \neg\neg y$ で $x \leq \neg\neg x \leq \neg\neg y$ より $x \leq \neg\neg y$ が成り立つ.

(4) : $\Longrightarrow$: 上の定理 1 の $\Longleftarrow$ での $F9^\circ$ の証明と同じで $\neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y \cdots$ ①. 次に $\neg x \wedge \neg y \leq \neg x \leq \neg\neg\neg x$ で仮定を使うと $x \leq \neg\neg x \leq \neg(\neg x \wedge \neg y)$ から $x \leq \neg(\neg x \wedge \neg y)$. 同様にして $y \leq \neg(\neg x \wedge \neg y)$. $T7^\circ$ より $x \vee y \leq \neg(\neg x \wedge \neg y) \leq \neg\neg\neg(\neg x \wedge \neg y)$ で仮定を使って $\neg x \wedge \neg y \leq \neg\neg(\neg x \wedge \neg y) \leq \neg(x \vee y)$ から $\neg x \wedge \neg y \leq \neg(x \vee y) \cdots$ ②. ①, ② に $T2$ を使って $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ が成り立つ.

$\Longleftarrow$: $x \leq \neg\neg y$ とすると $T4$ から $x \vee \neg\neg y = \neg\neg y$ で両辺に否定をとり, 仮定を使うと $\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg\neg\neg y$. よって $\neg y \leq \neg\neg\neg y \leq \neg x$ から $\neg y \leq \neg x$ が成り立つ. 次に $\neg y \leq \neg x$ とすると $\neg y \vee \neg x = \neg x$ で両辺に否定をとり, 仮定を使うと $x \leq \neg\neg x = \neg\neg y \wedge \neg\neg x \leq \neg\neg y$ から $x \leq \neg\neg y$ が成り立つ.

(5) : (4) の $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ を使う. $a = x \wedge \neg\neg y$ とおく. $x = x \wedge 1 = x \wedge (\neg(\neg y \vee a) \vee \neg\neg(\neg y \vee a)) = (x \wedge \neg(\neg y \vee a)) \vee (x \wedge \neg\neg(\neg y \vee a)) = (x \wedge \neg\neg y \wedge \neg a) \vee (x \wedge \neg\neg(\neg y \vee a)) = ((x \wedge \neg\neg y) \wedge \neg a) \vee (x \wedge \neg\neg(\neg y \vee a)) = (a \wedge \neg a) \vee (x \wedge \neg\neg(\neg y \vee a)) = 0 \vee (x \wedge \neg\neg(\neg y \vee a)) = x \wedge \neg\neg(\neg y \vee a)$. よって $x \leq \neg\neg(\neg y \vee a)$ で仮定から $\neg(\neg y \vee a) \leq \neg x$ で $\neg\neg y \wedge \neg a \leq \neg x$. これと $\neg\neg x \leq \neg\neg x$ とで注意 1 の $\wedge$ の単調性を使って $\neg\neg y \wedge \neg a \wedge \neg\neg x \leq \neg x \wedge \neg\neg x = 0$ から $(\neg a \wedge \neg\neg x) \wedge \neg\neg y = 0$. これを使うと $(\neg a \wedge \neg\neg x) \wedge \neg\neg\neg y = ((\neg a \wedge \neg\neg x) \wedge \neg\neg\neg y) \vee 0 = ((\neg a \wedge \neg\neg x) \wedge \neg\neg\neg y) \vee ((\neg a \wedge \neg\neg x) \wedge \neg\neg y) = (\neg a \wedge \neg\neg x) \wedge (\neg\neg\neg y \vee \neg\neg y) = (\neg a \wedge \neg\neg x) \wedge 1 = \neg a \wedge \neg\neg x$. よって $\neg a \wedge \neg\neg x \leq \neg\neg\neg y$. これと $\neg a \wedge \neg x \leq \neg x$ とで $\vee$ の単調性を使うと $(\neg a \wedge \neg x) \vee (\neg a \wedge \neg\neg x) \leq \neg x \vee \neg\neg\neg y \cdots$ ③. ところで $(\neg a \wedge \neg x) \vee (\neg a \wedge \neg\neg x) = \neg a \wedge (\neg x \vee \neg\neg x) = \neg a \wedge 1 = \neg a = \neg(x \wedge \neg\neg y) \cdots$ ④. ③, ④ より $\neg(x \wedge \neg\neg y) \leq \neg x \vee \neg\neg\neg y$ で (1) より $\neg\neg\neg y = \neg y$ から $\neg(x \wedge \neg\neg y) \leq \neg x \vee \neg y$ が成り立つ. 上の (3) から $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge \neg\neg y)$. よって $\neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg y$ が成り立つ.

(6) : $\Longrightarrow$: $T5$ より $0 \leq \neg\neg\neg 1$ で仮定 $T9^*$ を使うと $1 \leq \neg\neg 1 \leq \neg 0$ より $1 \leq \neg 0$. また $T5^\circ$ から $\neg 0 \leq 1$ で $\neg 0 = 1$ が成り立つ. 次に $x \wedge \neg y = 0$ とすると $x \wedge \neg\neg y = (x \wedge \neg\neg y) \vee 0 = (x \wedge \neg\neg y) \vee (x \wedge \neg y) = x \wedge (\neg\neg y \vee \neg y) = x \wedge 1 = x$ から $x \leq \neg\neg y$. これに仮定 $T9^*$ を使うと $\neg y \leq \neg x$. 逆に $\neg y \leq \neg x$ とする. これと $x \leq x$ とで $\wedge$ の単調性を使って $x \wedge \neg y \leq x \wedge \neg x = 0$ から $x \wedge \neg y = 0$ が成り立つ.

$\Longleftarrow$: $(x \wedge \neg y = 0 \Longleftarrow \neg y \leq \neg x)$ で y を x にすると $x \wedge \neg x = 0$ が成り立つ. 次に $x \leq \neg\neg y$ とする. これと $\neg y \leq \neg y$ とで $\wedge$ の単調性を使うと $x \wedge \neg y \leq \neg\neg y \wedge \neg y = 0$ から $x \wedge \neg y = 0$. 仮定より $\neg y \leq \neg x$ が成り立つ. 上の定理 1 の $\Longrightarrow$ での $T9^*$ の証明と同じで $x \leq \neg\neg y \Longleftarrow \neg y \leq \neg x$ が成り立つ. (証明終)

ここで, [1] の $F9$ と本論文の $F9^*$ とが同値であることがわかる.

[注意 **3**] $T1 \sim T7^\circ$ と $T10$ が成り立つとき, 次のことが成り立つ.

$$(F9)[\neg(x \wedge \neg y) = \neg x \vee \neg\neg y] \iff (F9^*)[\neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg y]$$

(証明)

$\Longrightarrow$: [1] の定理 1 より $T9$ が成り立ち, [1] の注意 2 の (1) から $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ. これから $\neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg\neg\neg y = \neg x \vee \neg y$. $\Longleftarrow$: 本論文の定理 1 より $T9^*$ が成り立ち, 本論文の注意 2 の (1) から $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つから $\neg(x \wedge \neg y) = \neg(x \wedge \neg\neg\neg y) = \neg x \vee \neg\neg y$. (証明終)

[2] と同様に次のことが成り立つ.

[注意 **4**] 束において, 次の (1), (2), (3) が成り立つ.

(1) $[(F9^* \text{ または } F9^\circ) \text{ かつ } x \le \neg\neg x] \Longrightarrow \neg\neg\neg x = \neg x$

$$(2) \left\{\begin{array}{l} (F9^*)\, \neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg\, y \\ (F9^\circ)\, \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\ \neg\neg\neg x = \neg x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} ①\ \neg\neg(x \wedge \neg y) = \neg\neg x \wedge \neg y = \neg\neg(\neg\neg x \wedge \neg y) \\ ②\ \neg\neg(x \vee \neg y) = \neg\neg x \vee \neg y = \neg\neg(\neg\neg x \vee \neg y) \\ ③\ \neg\neg(x \vee y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y \\ ④\ \neg(\neg x \vee \neg y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y \end{array}\right.$$

(3) $(F9^*$ かつ $F9^\circ)$ が成り立つとき

$$\neg\neg\neg x = \neg x \iff \left\{\begin{array}{l} ⑤\ \neg\neg(\neg x \wedge \neg y) = \neg x \wedge \neg y \\ ⑥\ \neg\neg(\neg x \vee \neg y) = \neg x \vee \neg y \end{array}\right.$$

(証明)

(1) : $x \le \neg\neg x$ で x を $\neg x$ にすると $\neg x \le \neg\neg\neg x$. $F9^*$ を仮定する．$x \le \neg\neg x \le \neg\neg\neg\neg x$ より $x \wedge \neg\neg\neg\neg x = x$. この両辺に否定をとり, $F9^*$ を使うと $\neg x \vee \neg\neg\neg x = \neg x$ から $\neg\neg\neg x \le \neg x$. 次に $F9^\circ$ を仮定すると $x \le \neg\neg x$ から $x \vee \neg\neg x = \neg\neg x$. この両辺に否定をとり, $F9^\circ$ を使うと $\neg x \wedge \neg\neg\neg x = \neg\neg\neg x$ から $\neg\neg\neg x \le \neg x$. よって $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ.

(2) : $\Longrightarrow$: $\neg\neg(x \wedge \neg y) = \neg\neg(x \wedge \neg\neg\neg y) = \neg(\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg\neg x \wedge \neg y$. また $\neg\neg(\neg\neg x \wedge \neg y) = \neg\neg(\neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y) = \neg(\neg\neg\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg\neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg\neg x \wedge \neg y$. よって ① が成り立つ．次に $\neg\neg(x \vee \neg y) = \neg(\neg x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg x \vee \neg y$. また $\neg\neg(\neg\neg x \vee \neg y) = \neg(\neg\neg\neg x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg\neg\neg x \vee \neg y = \neg\neg x \vee \neg y$. よって ② が成り立つ．さらに $\neg\neg(x \vee y) = \neg(\neg x \wedge \neg y) = \neg(\neg x \wedge \neg\neg\neg y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y$ より ③ が成り立つ．④ は仮定 $F9^\circ$ より明らかである．$\Longleftarrow$: 仮定 ① で x を $\neg x$ に, y を x にすると $\neg\neg\neg x = \neg\neg(\neg x \wedge \neg x) = \neg\neg\neg x \wedge \neg x$ から $\neg\neg\neg x \le \neg x$. また 仮定 ② でも x を $\neg x$ に, y を x にすると $\neg\neg\neg x = \neg\neg(\neg x \vee \neg x) = \neg\neg\neg x \vee \neg x$ から $\neg x \le \neg\neg\neg x$. よって $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ．これを使うと $\neg(x \vee y) = \neg\neg\neg(x \vee y) \overset{③}{=} \neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y) \overset{④}{=} \neg\neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg x \wedge \neg y$. 次に $\neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg\neg(x \wedge \neg\neg y) \overset{①}{=} \neg(\neg\neg x \wedge \neg\neg y) \overset{④}{=} \neg\neg(\neg x \vee \neg y) \overset{③}{=} \neg\neg\neg x \vee \neg\neg\neg y = \neg x \vee \neg y$.

(3) : $\Longrightarrow$: $\neg\neg(\neg x \wedge \neg y) = \neg(\neg(\neg x \wedge \neg\neg\neg y)) = \neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg\neg x \wedge \neg\neg\neg y = \neg x \wedge \neg y$. 次に $\neg\neg(\neg x \vee \neg y) = \neg(\neg\neg x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg\neg x \vee \neg y = \neg x \vee \neg y$. $\Longleftarrow$: 仮定 ⑤ または ⑥ で y を x にすれば $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ.　(証明終)

さらに, [2] と同様に次のことが成り立つ.

[注意 **5**]　最小元 0 と最大元 1 をもつ束 $(T1 \sim T7^\circ$ が成り立つ$)$ において, 次の (1)〜(5) が成り立つ.

(1) $x \le \neg\neg x \Longrightarrow \neg\neg 1 = 1$

(1°) $(\neg 0 = 1$ かつ $x \wedge \neg x \le 0) \Longrightarrow \neg\neg 0 = 0$

(2) $\neg 1 = 0 \iff \neg 1 \le x$

(2°) $\neg 0 = 1 \iff x \le \neg 0$

(3) $x \wedge \neg x \le 0 \Longrightarrow \neg 1 = 0$

(3°) $(x \le \neg y \Longrightarrow y \le \neg x) \Longrightarrow \neg 0 = 1$

(4) $\neg 1 = 0$ が成り立つとき　　$\neg 0 = 1 \iff \neg\neg 1 = 1$

(4°) $\neg 0 = 1$ が成り立つとき　　$\neg 1 = 0 \iff \neg\neg 0 = 0$

(5) $(F9^*$ かつ $\neg 0 = 1$ かつ $\neg 1 = 0$ かつ $x \le \neg\neg x)$ が成り立つとき

$$①\ x \wedge \neg x = 0 \iff ②\ \neg x \vee \neg\neg x = 1 \iff ③\ \neg x \wedge \neg\neg x = 0$$

(証明)

(1) $\sim$ (4°) は [2] の注意 4 の証明と同じである.

(5) : ① $\Longrightarrow$ ② : 注意 4 の (1) より $\neg\neg\neg x = \neg x$ が成り立つ．仮定から $1 = \neg 0 = \neg(x \wedge \neg x) = \neg(x \wedge \neg\neg\neg x) = \neg x \vee \neg\neg x$.　② $\Longrightarrow$ ③ : $\neg x \wedge \neg\neg x \le \neg\neg(\neg x \wedge \neg\neg x) = \neg(\neg\neg x \vee \neg x) = \neg 1 = 0$ から $\neg x \wedge \neg\neg x = 0$ が成り立つ．③ $\Longrightarrow$ ①: $x \le \neg\neg x$ と $\neg x \le \neg x$ とで $\wedge$ の単調性を使って $x \wedge \neg x \le \neg\neg x \wedge \neg x = 0$ から $x \wedge \neg x = 0$ が成り立つ.　(証明終)

QSA* について, [2] と同様に次の同値性が成り立つ.

[注意 **6**]　**A** を BDL とする. **A** が QSA* であることと, 次の (1) ～ (5) は互いに同値である.

$$(1) \begin{cases} (F9^*)\ \neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg y \\ (F10)\ \neg 0 = 1 \\ (F11)\ x \wedge \neg x = 0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} (F9^*)\ \neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg y \\ (F10^\circ)\ \neg 1 = 0 \\ (F11)\ x \wedge \neg x = 0 \\ (T10)\ x \leq \neg\neg x \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} (T9^*)\ x \leq \neg\neg y \iff \neg y \leq \neg x \\ (F11)\ x \wedge \neg x = 0 \\ \neg x \vee \neg\neg x = 1 \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} (F9^\circ)\ \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\ (F11)\ x \wedge \neg x = 0 \\ x \wedge \neg y = 0 \iff \neg y \leq \neg x \\ \neg x \vee \neg\neg x = 1 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} (F9^*)\ \neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg y \\ (F10)\ \neg 0 = 1 \\ x \wedge \neg y = 0 \iff \neg y \leq \neg x \end{cases}$$

(証明)

A が QSA* である $\Longrightarrow$ (1) は明らかである. **A** が QSA* である $\Longleftarrow$ (1) について. $(F8)$: $x \wedge \neg\neg x = 0 \vee (x \wedge \neg\neg x) = (x \wedge \neg x) \vee (x \wedge \neg\neg x) = x \wedge (\neg x \vee \neg\neg x) = x \wedge (\neg\neg x \vee \neg x) = x \wedge \neg(\neg x \wedge \neg\neg x) = x \wedge \neg 0 = x \wedge 1 = x$. $(F8^\circ)$: $x \vee \neg\neg x = 1 \wedge (x \vee \neg\neg x) = \neg 0 \wedge (x \vee \neg\neg x) = \neg(\neg x \wedge \neg\neg x) \wedge (x \vee \neg\neg x) = (\neg\neg x \vee \neg x) \wedge (x \vee \neg\neg x) = \neg\neg x \vee (\neg x \wedge x) = \neg\neg x \vee 0 = \neg\neg x$. また $x \leq \neg\neg x$ かつ $\neg(x \wedge \neg\neg y) \geq \neg x \vee \neg y$ が成り立つから 注意 2 の (3) から $T9^*$ が成り立ち, 注意 2 の (4) より $F9^\circ$ が成り立つ. 次に $0 = 1 \wedge \neg 1 = \neg 1$ から $F10^\circ$ が成り立つ.
(1) $\Longrightarrow$ (2) : 上の証明と同様にして $F10^\circ$ と $T10$ が成り立つ.
(2) $\Longrightarrow$ (3) : 注意 2 の (3) から $T9^*$ が成り立つ. 注意 5 の (1) から $1 = \neg\neg 1 = \neg(\neg 1) = \neg 0 = \neg(\neg x \wedge \neg\neg x) = \neg\neg x \vee \neg x$.
(3) $\Longrightarrow$ (4) : 注意 2 の (4) から $F9^\circ$ が成り立つ. また 注意 2 の (6) から $x \wedge \neg y = 0 \iff \neg y \leq \neg x$ が成り立つ.
(4) $\Longrightarrow$ (5) : $(x \wedge \neg\neg y) \wedge \neg x = \neg\neg y \wedge (x \wedge \neg x) = \neg\neg y \wedge 0 = 0$ で仮定を使って $\neg x \leq \neg(x \wedge \neg\neg y) \cdots$①. $(x \wedge \neg\neg y) \wedge \neg y = x \wedge (\neg\neg y \wedge \neg y) = x \wedge 0 = 0$ で仮定を使って $\neg y \leq \neg(x \wedge \neg\neg y) \cdots$②. ①, ②で $T7^\circ$ を使うと $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge \neg\neg y) \cdots$③. 次に $a = x \wedge \neg\neg y$ とおく. $x \wedge \neg(\neg y \vee a) = x \wedge (\neg\neg y \wedge \neg a) = (x \wedge \neg\neg y) \wedge \neg a = a \wedge \neg a = 0$. 仮定を使って $\neg(\neg y \vee a) \leq \neg x$. これと $\neg\neg x \leq \neg\neg x$ とで $\wedge$ の単調性を使って $\neg(\neg y \vee a) \wedge \neg\neg x \leq \neg x \wedge \neg\neg x = 0$. よって $\neg(\neg y \vee a) \wedge \neg\neg x = 0$. これより $\neg\neg y \wedge \neg(a \vee \neg x) = \neg\neg y \wedge \neg a \wedge \neg\neg x = \neg(\neg y \vee a) \wedge \neg\neg x = 0$. 仮定を使って $\neg(a \vee \neg x) \leq \neg\neg\neg y$ から $\neg a \wedge \neg\neg x \leq \neg\neg\neg y$. これと $\neg a \wedge \neg x \leq \neg x$ とで $\vee$ の単調性を使って $(\neg a \wedge \neg x) \vee (\neg a \wedge \neg\neg x) \leq \neg x \vee \neg\neg\neg y$. ここで $(\neg a \wedge \neg x) \vee (\neg a \wedge \neg\neg x) = \neg a \wedge (\neg x \vee \neg\neg x) = \neg a \wedge 1 = \neg a = \neg(x \wedge \neg\neg y)$. よって $\neg(x \wedge \neg\neg y) \leq \neg x \vee \neg\neg\neg y \cdots$④. ここで $\neg\neg x \wedge \neg x = 0$ に仮定を使うと $\neg x \leq \neg\neg\neg x$. また $x = x \wedge 1 = x \wedge (\neg x \vee \neg\neg x) = (x \wedge \neg x) \vee (x \wedge \neg\neg x) = 0 \vee (x \wedge \neg\neg x) = x \wedge \neg\neg x$ より $x \leq \neg\neg x$. これと $\neg\neg\neg x \leq \neg\neg\neg x$ とで $\wedge$ の単調性を使って $x \wedge \neg\neg\neg x \leq \neg\neg x \wedge \neg\neg\neg x = 0$ より $x \wedge \neg\neg\neg x = 0$. 仮定から $\neg\neg\neg x \leq \neg x$. よって $\neg\neg\neg x = \neg x$. ④ から $\neg(x \wedge \neg\neg y) \leq \neg x \vee \neg y \cdots$⑤. ③, ⑤で $T2$ を使うと $\neg(x \wedge \neg\neg y) = \neg x \vee \neg y$ が成り立つ. また $\neg 0 = \neg(\neg x \wedge \neg\neg x) = \neg\neg x \vee \neg x = 1$ から $F10$ が成り立つ.
(5) $\Longrightarrow$ (1) : 仮定 $x \wedge \neg y = 0 \Longleftarrow \neg y \leq \neg x$ で y を x にすれば $x \wedge \neg x = 0$ が成り立つ. (証明終)

§ 2　QSA* のシーケントによる形式的体系 GQSA*

[1], [2] と同様にシーケントの定義をする. ただし, $\longrightarrow b_1, \ldots, b_n$ と $a_1, \ldots, a_m \longrightarrow$ は QSA* でそれぞれ $1 \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ と $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq 0$ とに解釈する.

このとき, 準ストーン代数*(QSA*) のシーケントによる形式的体系 GQSA* を [1], [2] と同様に次のように定義する.

[定義 **3**]　(GQSA* の定義)

[1]　始式

$(B1)\quad a \longrightarrow a \quad (B2)\quad 0 \longrightarrow \Delta \quad (B3)\quad \Gamma \longrightarrow 1 \quad (B4)\quad a \longrightarrow \neg\neg a \quad (B5)\quad a, \neg a \longrightarrow$

[2]　推論規則

(1) 構造に関する推論規則　:

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (w \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a}\ (\longrightarrow w)$$

$$\frac{a,\, a,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (c \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a,\, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a}\ (\longrightarrow c)$$

$$\frac{\Gamma_1,\, a,\, b,\, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1,\, b,\, a,\, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\ (e \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\, a,\, b,\, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1,\, b,\, a,\, \Delta_2}\ (\longrightarrow e)$$

$$\frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1,\, a \quad a,\, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1,\, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1,\, \Delta_2}\ (cut)$$

(2) 論理記号に関する推論規則　:

$$\frac{a,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge_1 \longrightarrow) \qquad \frac{b,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \wedge b,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\wedge_2 \longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a \vee b}\ (\longrightarrow \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a \vee b}\ (\longrightarrow \vee_2)$$

$$\frac{a,\, \Gamma \longrightarrow \Delta \quad b,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}{a \vee b,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\vee \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a \quad \Gamma \longrightarrow \Delta,\, b}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a \wedge b}\ (\longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{\neg\neg a,\, b \ \longrightarrow\ \neg\neg c}{\neg c \ \longrightarrow\ \neg b,\, \neg a}\ (\longrightarrow \neg) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \neg a \quad \Gamma \longrightarrow \neg b}{\Gamma \longrightarrow \neg(a \vee b)}\ (\longrightarrow \neg\vee)$$

ただし, Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $\neg\Gamma$ は $\neg a_m, \ldots, \neg a_1$ を表し, $\Gamma = \emptyset$ のときは $\neg\Gamma = \emptyset$ とする.

[注意 **7**]　次の (1), (2) が成り立つ.

$$(1)\ (B4) \iff \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, \neg\neg a}\ (\longrightarrow \neg\neg) \qquad (2)\ (B5) \iff \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a}{\neg a,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\neg \longrightarrow)$$

(証明)

(1): $\Longrightarrow$: $\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a \quad a \longrightarrow \neg\neg a}{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, \neg\neg a}$　　$\Longleftarrow$: $\dfrac{a \longrightarrow a}{a \longrightarrow \neg\neg a}$

(2): $\Longrightarrow$: $\dfrac{\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta,\, a \quad a,\, \neg a \longrightarrow}{\Gamma,\, \neg a \longrightarrow \Delta}}{\neg a,\, \Gamma \longrightarrow \Delta}$　　$\Longleftarrow$: $\dfrac{\dfrac{a \longrightarrow a}{\neg a,\, a \longrightarrow}}{a,\, \neg a \longrightarrow}$

(証明終)

§ 3　QSA* と GQSA* の演繹的同値性

[1], [2] と同様にシーケント $\Gamma \longrightarrow \Delta$ が GQSA* で証明可能であるとき, $\vdash \Gamma \longrightarrow \Delta$ と書く. また 不等式 $a \leq b$ が QSA* で成り立つとき, $\models a \leq b$ と書く. さらに [1], [2] と同様に QSA* での等号を定義して, リンデンバウム代数 (Lindenbaum algebra) を考える.

このとき, [1] , [2] と同様にして, 次のことが成り立つ.

[定理 **2**]　a, b をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\models a \leq b \qquad \text{ならば} \qquad \vdash a \longrightarrow b$$

(証明)

QSA* のすべての公理 ($F1$ ～ $F11$) が GQSA* で証明可能であることを示せばよいが, これらと同値な $T1$ ～ $T13$ が GQSA* で証明可能であることを示す.

$T1$～$T8°$ は [1] の定理 2 の証明と同じである.

$T9^*$: $\dfrac{x \longrightarrow \neg\neg y}{\neg y \longrightarrow \neg x}\ (\longrightarrow \neg)$

$$\dfrac{x \longrightarrow \neg\neg x \qquad \dfrac{\dfrac{\neg y \longrightarrow \neg x \quad \neg x \longrightarrow \neg\neg\neg x}{\neg y \longrightarrow \neg\neg\neg x}}{\neg\neg x \longrightarrow \neg\neg y}\ (\longrightarrow \neg)}{x \longrightarrow \neg\neg y}$$

$T10$: 始式 (B4) から成り立つ.

$T11$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \longrightarrow x}{\neg\neg y, x \longrightarrow x} \qquad \dfrac{\neg\neg y \longrightarrow \neg\neg y}{\neg\neg y, x \longrightarrow \neg\neg y}}{\neg\neg y, x \longrightarrow x \wedge \neg\neg y}}{\neg\neg y, x \longrightarrow \neg\neg(x \wedge \neg\neg y)}}{\neg(x \wedge \neg\neg y) \longrightarrow \neg x, \neg y}\ (\longrightarrow \neg)}{\neg(x \wedge \neg\neg y) \longrightarrow \neg x \vee \neg y}$$

$T11°$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg x \longrightarrow \neg x}{\neg x, \neg y \longrightarrow \neg x}}{\neg x \wedge \neg y \longrightarrow \neg x} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg y \longrightarrow \neg y}{\neg x, \neg y \longrightarrow \neg y}}{\neg x \wedge \neg y \longrightarrow \neg y}}{\neg x \wedge \neg y \longrightarrow \neg(x \vee y)}\ (\longrightarrow \neg\vee)$$

$T12$:

$$\dfrac{\dfrac{\longrightarrow 1 \quad 1, \neg 1 \longrightarrow}{\neg 1 \longrightarrow}}{\neg 1 \longrightarrow x}$$

$T13$: 始式 (B5) から成り立つ.

(証明終)

[定理 **3**] $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ をワードとするとき, 次のことが成り立つ.

$$\vdash a_1, \ldots, a_m \longrightarrow b_1, \ldots, b_n \qquad \text{ならば} \qquad \models a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$$

(証明)

Γ が $a_1, \ldots, a_m$ のとき $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ を x で表す. Δ が $b_1, \ldots, b_n$ のとき $b_1 \vee \cdots \vee b_n$ を y で表す. GQSA* の始式 $(B1), (B2), (B3), (B4), (B5)$ はそれぞれ $T1, T5, T5°, T10, T13$ から QSA* で成り立つ. 次に GQSA* の各推論規則の上式 (上のシーケント) に対応する不等式が QSA* で成り立つと仮定するとき, 下式に対応する不等式が QSA* で成り立つことを示せばよい.

$(w \longrightarrow)$～$(\longrightarrow \wedge)$ は [1] の定理 3 の証明と同じである.

$(\longrightarrow \neg)$: $\models \neg\neg a \wedge b \leq \neg\neg c$ とすると $T9^*$ から $\models \neg c \leq \neg(\neg\neg a \wedge b)$. $F4$ より $\neg\neg a \wedge b = b \wedge \neg\neg a$ であり $F9^*$ より $\neg(b \wedge \neg\neg a) = \neg b \vee \neg a$ であるから $\models \neg c \leq \neg b \vee \neg a$ が成り立つ. 次に $\neg\neg a$ がないとき. $\models b \leq \neg\neg c$ とすると $T9^*$ から $\models \neg c \leq \neg b$ が成り立つ. また b がないとき. $\models \neg\neg a \leq \neg\neg c$ とすると $T9^*$ より $\models \neg c \leq \neg\neg\neg a$ で注意 2 の (1) から $\neg\neg\neg a = \neg a$ であるから $\models \neg c \leq \neg a$ が成り立つ. さらに $\neg\neg a$ と b がないとき. $\models 1 \leq \neg\neg c$ とすると $T9^*$ より $\models \neg c \leq \neg 1$ で $F10°$ より $\neg 1 = 0$ であるから $\models \neg c \leq 0$ が成り立つ. 最後に $\neg\neg c$ がないとき. $\models \neg\neg a \wedge b \leq 0$ とすると $T9^*$ より $\models \neg 0 \leq \neg(\neg\neg a \wedge b)$ で $\neg 0 = 1$, $\neg(\neg\neg a \wedge b) = \neg b \vee \neg a$ であるから $\models 1 \leq \neg b \vee \neg a$ が成り立つ.

$(\longrightarrow \neg\vee)$: $\models x \leq \neg a$ かつ $\models x \leq \neg b$ とすると $T7$ より $\models x \leq \neg a \wedge \neg b$. $T11°$ から $\models \neg a \wedge \neg b \leq \neg(a \vee b)$ で $T3$ より $\models x \leq \neg(a \vee b)$ が成り立つ. (証明終)

以上により QSA* と GQSA* が演繹的に同値であることがわかる.

参考文献

[1] 荒金 憲一, MS 代数とストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 33(1998), 119–127.

[2] 荒金 憲一, 準ストーン代数のシーケントによる形式化, 奈良高専研究紀要 40(2005), 87–94.

[3] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift 39(1935), 176–216, 405–431.

[4] N.H. Sankappanavar and H.P. Sankappanavar, *Quasi-Stone algebaras*, Mathematical Logic Quarterly 39(1993), 255–268.