二次元リボン結び目のもろて型 Ⅳ

安田　智之

Amphicheirality of ribbon 2-knots Ⅳ

Tomoyuki YASUDA

一次元結び目の局所問題の代表的なものとして、結び目 k^1 とその鏡像 $(k^1)^*$ とが結び目として同値であるかどうかを決定する問題がある。同値であるとき、結び目 k^1 は、もろて型であるという。これに関し、交代結び目に限れば、最小交点数が奇数である結び目は、決してもろて型になれないという事実が示された（[1], [2]）。それでは、一般の一次元結び目に対してこの定理が成立するのか、という問題は長らく未解決であったが、Thistlethwaite によって最小交点数 15 のもろて型結び目が発見された（[3]）。

一方、二次元リボン結び目の不変量の一つに最小交差数がある（[4], [5]）。これは一次元結び目の古典的不変量である最小交点数の自然な拡張である。　二次元リボン結び目への上述の問題の拡張、即ち、最小交差数が奇数であるような（＋）もろて型二次元リボン結び目が存在するか、という問題は [6] で考察され、最小交差数が３の（＋）もろて型二次元リボン結び目が発見された。その後 [7] では、最小交差数が５以上の奇数である（＋）もろて型二次元リボン結び目について任意有限個の有力な候補が挙げられたが、問題の解決に至っていなかった。

本論文では、最小交差数が５の（＋）もろて型二次元リボン結び目が存在することを示す。

１．緒　論

四次元ユークリッド空間内の二次元リボン結び目の対称性について知られている事としては、ある三次元ユークリッド空間について対称な位置におけること、そして（−）もろて型であること、がある。従って二次元リボン結び目に関しては可逆的であることと、（＋）もろて型であることとは同義である（[8]）。与えられた二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式が相反的でないときは（＋）もろて型でない、即ち可逆でないので、そのような二次元リボン結び目が任意有限個存在することは早くから知られていた（[8]）。　ところで、任意の一次元結び目は Artin の構成法により、そのスパン結び目が構成される。スパン結び目は二次元リボン結び目であり、すべて（＋）もろて型である（[8], [9]）。

さて、一次元結び目の対称性について、テイトの予想と呼ばれる一連の予想があり、第一予想と第二予想については解決された（[1, p. 200], [2]）。その系として最小交点数が奇数である一次元交代結び目は決してもろて型になれない、という事実がある。これが一般の一次元結び目について成立するかどうかは長らく未解決であったが、Thistlethwaite により 15 交点のもろて型結び目が発見された。（[3]）。一方、一次元結び目の不変量である最小交点数に対応して、二次元リボン結び目の不変量である最小交差数の概念が、拡張概念として [4]、[5] によって定義された。最小交差数に関しては、一次元結び目に関するもろ手型の問題と同様、最小交差数が奇数である（＋）もろて型二次元リボン結び目が存在するか、ということが問題であったが、未解決であった。　これに関し、[6] では、最小交差数が３であるような（＋）もろて型二次元リボン結び目の存在することが示された。

本論文では更に、次のことを示す。

定理　　最小交差数が５であるような、（＋）もろて型の二次元リボン結び目が存在する。

２．準　　備

２．１　定義（[4]）

$\{D^3_\mu \mid \mu = 1, 2, \cdots, m\}$ を互いに交わらない四次元ユークリッド空間 R^4 内の三次元球体の族とする。また、$\partial D^3_\mu = O^2_\mu$ とおく。

一方、$f^r_{i_r j_r} : D^2 \times I \to R^4$

$(r = 1, 2, \cdots, m-1 \ ; \ i_r, j_r = 1, 2, \cdots, m)$

を、像が互いに交わらない埋め込みの族とし、かつ、次の性質（１）、（２）を満たすものとする。但し D^2 は二次元球体、$I = [0,1]$ である。

（１）$f^r_{i_r j_r}$（$D^2 \times I$）$\cup$ O^2_μ $= \begin{cases} f^r_{i_r j_r}\,(D^2 \times \{0\}) & (i_r = \mu) \\ f^r_{i_r j_r}\,(D^2 \times \{1\}) & (j_r = \mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$

（２）（$\cup^{m-1}_{r=1} f^r_{i_r j_r}$（$D^2 \times I$））$\cap$（$\cup^m_{\mu=1} O^2_\mu$）は連結。

ここで次の二次元球面を K^2 とする。

（$\cup^m_{\mu=1}$　O^2_μ）$\cup$（$\cup^{m-1}_{r=1} f^r_{i_r j_r}$（$D^2 \times I$）　）$- \mathring{T}$　　但し $T = \cup^{m-1}_{r=1} f^r_{i_r j_r}$（$D^2 \times I$）であり $\mathring{T}$ は T の内部を表す。この時、K^2 のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

２．２　定義 ([4])

$\mathcal{O} = \cup^m_{\mu=1} D^2_\mu$，$\mathcal{B} = \cup^{m-1}_{r=1} f^r_{i_r j_r}$（$D^2 \times I$）

とおくとき（ $\mathcal{O}$ ，$\mathcal{B}$ ）のことを二次元リボン結び目 K^2 に対する m ベースリボン表示（或いは単にリボン表示）と呼ぶ。

また $\mathcal{O}$ をベース、$\mathcal{B}$ をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目 K^2 に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことを K^2 のベース指数と呼び b（K^2）で表す。このとき K^2 は b（K^2）ベース二次元リボン結び目であるという。

２．３　定義 ([4])

$\ell_r = f^r_{i_r j_r}$（$\{0\} \times I$）　（ $r = 1, 2, \cdots, m-1$ ）とおく。但し、$\{0\}$ は D^2 の中心点である。ここで各 ℓ_r が $\mathcal{O}$ に有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各 ℓ_r の方向に従って a_{r1}，a_{r2}，…，a_{rs_r} とし（ $\mathcal{O}$ ，$\mathcal{B}$ ）のリボン交差と呼ぶ。但し各 ℓ_r の方向が O^2_i から O^2_j へ向かう方向とする。この時

$n = \sum_{r=1}^{m} s_r$ をリボン表示のリボン交差数と呼び、（ $\mathcal{O}$，$\mathcal{B}$ ）は n 交差リボン表示であるという。そうして K^2 に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことを K^2 の最小交差数（或いは単に交差数）と呼び cr（K^2）で表す。

２．４　定義

a_{r1}，a_{r2}，…，a_{rs_r} に対応して、s_r 個の文字からなる語 w_r をつくる。つくり方は ℓ_r が D^3_μ に点 a_{rv}（ $v = 1, 2, \cdots, s_r$ ）で正の側から交わるとき、w_r の v 番目の文字を x_μ 、負の側から交わるときは同様 x^{-1}_μ とするものとする。このようにしてつくられた語 $w_1, w_2, \cdots, w_{m-1}$ を利用して K^2 の結び目群 $\pi_1(R^4 - K^2)$ の群表示を次の様に構成できる。

（＊１）　$[\ x_\mu ; \mu = 1, 2, \cdots, m \mid x_i w_r x^{-1}_j w^{-1}_r\ ;$
$r = 1, 2, \cdots, m-1\ ]$

但し各 x_μ は O^2_μ のメリディアン生成元とする ([10])。以上の様な構成法でリボン表示（ $\mathcal{O}$ ，$\mathcal{B}$ ）から得られた群表示（＊１）のことを（ $\mathcal{O}$ ，$\mathcal{B}$ ）に関連したリボン群表示と呼ぶ。また各 w_r のことをこのリボン群表示の語と呼ぶ。一方、リボン群表示（＊１）からは、逆の手順でリボン表示（ $\mathcal{O}$ ，$\mathcal{B}$ ）を定められるので（ $\mathcal{O}$ ，$\mathcal{B}$ ）のことをリボン群表示（＊１）に関連したリボン表示と呼ぶ。

また，$\mathcal{O}$ をベース、$\mathcal{B}$ をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目 K^2 に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことを K^2 のベース指数と呼び b（K^2）で表す。このとき K^2 は $b(K^2)$ ベース二次元リボン結び目であるという。

２．５　定義

R^3_+ を R^4 内において $x_4 = 0$，$x_3 \geqq 0$ によって定義される R^3 の上半空間とし、R^3_- を R^4 内において $x_4 = 0$，$x_3 \leqq 0$ によって定義される R^3 の下半空間とする。ここで R^3_+ を方程式　$x'_1 = x_1$，$x'_2 = x_2$，$x'_3 = x_3 \cos\theta - x_4 \sin\theta$，　$x'_4 = x_3 \cos\theta + x_4 \sin\theta$，に従って回転させる。この時 R^2 を $x'_3 = x'_4 = 0$ と定めれば R^3_+ は R^2 について回転することになる。今、R^3 内の一次元結び目 k^1 を $k^1 \cap R^3_-$ がプロパーに埋め込まれた自明な弧であるように置いておく。この時、$k^1 \cap R^3_+$ を上述の回転の方程式に従って回転させた時に構成される二次元結び目を k^1 のスパン結び目と呼び、*spun*（k^1）で表す ([8], [11], [12])。

２．６　定義

二次元リボン結び目 K^2 に対しその鏡像を（K^2）* とし、結び目に入れられた方向を逆転したものを $-K^2$ とするとき $K^2 \sim$（K^2）* ならば K^2 は（＋）もろて型であるといい、$K^2 \sim -$（K^2）* ならば（－）もろて型であるという。また $K^2 \sim -$（K^2）ならば可逆的であるという。

２．７　定義

リボン表示（ $\mathcal{O}$ ，$\mathcal{B}$ ）に関連したリボン群表示を G とする。ベースの各成分に対応する G の生成元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ の名前の適当な入換えや、バンド各成分の方向逆転を適当に行なってそれに対応するリボン群表 G' をつくる。その上で G' の語を構成する文字 x_i を一斉に x^{-1}_i にするという操作でリボン群表示 G'' をつくる。

以上の構成で新たにつくられるリボン群表示 G' を G と同一にできるとき、G は（＋）もろて型リボン群表示であるという。また、（＋）もろて型リボン表示に関連したリボン表示のことを（＋）もろて型リボン表示という。

３．定理の証明

（＋）もろて型の定義（２．６）と（＋）もろて型リボン群表示の定義（２．７）により次のことはすぐ分かる。

３．１　補題 ([6])

（＋）もろて型リボン群表示に関連したリボン表示をもつ二次元リボン結び目は（＋）もろて型である。

[6] においては、この補題と［13］におけるリボン表示の安定同値変形を利用して、3_5 二次元リボン結び目 ([3]) が、リボン交差数４の（＋）もろて型リボン表示をもつことを示した。一方、そのリボン表示は、4_1 結び目の正則表示として Schubert の標準形 ([14, p.36]) をとり定義（２．５）の方法で自然に構成される *spun*（4_1）のリボン表示と一致していることも指摘された。従って、[6] における定理とその二つの系（［６，２．４］，［６，２．５］）をまとめて言

い換えると次の様になる。

３．２　補題（[6]）

spun（4_1） は最小交差数３の（＋）もろて型二次元リボン結び目である。

一方、3_1 結び目の二橋表示から定義（２．５）の方法で自然に構成される *spun*（3_1） のリボン表示（[15]）から次のことはすぐ分る。

３．３　補題

spun（3_1） は最小交差数２の（＋）もろて型二次元リボン結び目である。

従って、*spun*（3_1） と *spun*（4_1） の間に１ハンドルを付加することによって得られる二次元リボン結び目を

spun（3_1） ＃ *spun*（4_1）

で表すと、

補題（３．２、３．３）により次の事実が得られる。

３．４　補題

spun（3_1） ＃ *spun*（4_1） は交差数５以下の（＋）もろて型二次元リボン結び目である。

ところが、最小交差数４以下の二次元リボン結び目は、すでに総て列挙されていて、その中で

spun（3_1） ＃ *spun*（4_1） と同じアレキサンダー多項式

$(1 - t + t^2)(1 - 3t + t^2) \quad (\mathrm{mod}\ \pm t^n)$

をもつ二次元リボン結び目は一つしかないことがわかる。（[4], [5], [16], [17], [18], [19]）。それは次のリボン群表示 G_j に関連したリボン表示を $\mathcal{R}_j$ とするとき、$\mathcal{R}_j$ の実現する二次元リボン結び目である。これを K_{110} とおく。

$$G_j = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1 w_{j1} x^{-1}_2 w^{-1}_{j1}, x_1 w_{j2} x^{-1}_3 w^{-1}_{j2}, x_1 w_{j3} x^{-1}_4 w^{-1}_{j3}, x_2 w_{j4} x^{-1}_5 w^{-1}_{j4}]$$

但し、 $w_{j1} = x_3$, $w_{j2} = x_4$, $w_{j3} = x_5^{-1}$, $w_{j4} = x_2^{-1}$ である。

K_{110} のアレキサンダー多項式は、[19] によれば、

$$\begin{aligned}\Delta_{110} &= 1 - 4t + 5t^2 - 4t^3 + t^4 \\ &= (1 - t + t^2)(1 - 3t + t^2) \\ &\quad (\mathrm{mod}\ \pm t^n)\end{aligned}$$

である。しかし、K_{110} のアレキサンダー行列は [20] の方法で容易に求められ、基本変形で１×１行列まで変形できることが分る。一方、*spun*（3_1） ＃ *spun*（4_1） のアレキサンダー行列は、(1, 1) 成分が $1 - t + t^2$、(２，２) 成分が $1 - 3t + t^2$、その他の成分が０であって基本変形で１×１行列まで変形できない。従って、*spun*（3_1） ＃ *spun*（4_1） と K_{110} は結び目として同値でないことが分る。よって *spun*（3_1） ＃ *spun*（4_1） の最小交差数は５以上であり、

補題（３．４）より

$$cr\,(spun(3_1)\ \#\ spun(4_1)) = 5$$

である。

以上により *spun*（3_1） ＃ *spun*（4_1） は最小交差数が５の（＋） もろて型二次元リボン結び目であることが示せた。

（証了）

４．結　語

[6] と今回の結果から最小交差数が奇数の （＋）もろて型二次元リボン結び目が少なくとも二つ存在することが分った。

今回、アレキサンダー多項式が４次式である二次元リボン結び目の最小交差数が５であることを示すのに、最小交差数が４以下の二次元リボン結び目の謂わば「結び目表」を用いたことになるが、今後、任意の奇数についてその数を最小交差数にもつ一連の（＋）もろて型の二次元リボン結び目を構成するためには、二次元リボン結び目の最小交差数が評価できる不変量を探す、又はつくることが必要である。

参考文献

[1] 村杉邦男、結び目理論とその応用（1993）、日本評論社.

[2] Murasugi, K.,On invariants of graphs with applications to knot theory, Trans. Amer. Math. Soc. 314(1989), 1-49.

[3] C.C. アダムス（金信泰造訳）、結び目の数学（1998）、培風館. Hoste, J.; Thistlethwaite, M.; Weeks, J., The first 1, 701, 936 knots, Math. Intelligencer 20(1998), 33-48.

[4] Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon 2-knots, J. Knot Theory Ramifications 10(2001), 999-1003.

[5] 安田智之、二次元リボン結び目の最小交差数とベース数、「結び目の不変量と幾何構造」研究集会報告集（2000）、98-106.

[6] 安田智之、二次元リボン結び目のもろて型 Ⅱ、奈良工業高等専門学校研究紀要 38（2003. ３月）、97-99.

[7] 安田智之、二次元リボン結び目のもろて型 Ⅲ、奈良工業高等専門学校研究紀要 41（2005. ３月）、123-126.

[8] Suzuki,S., Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4 (1976), 241-371.

[9] Satoh, S., Virtual knot presentation of ribbon torus-knots, J. Knot Theory Ramifications 10 (2000), 531-542.

[10] Yajima, T., On characterization of knot groups of some spheres in R , Osaka J. Math. 6 (1969),435-446.

[11] Andrews, J.J.; Curtis, M.L., Knotted 2-spheres in the 4-sphere, Ann. of Math. 70(1959), 565-571.

[12] Kanenobu, T.; Marumoto, Y., Unknotting and fusion numbers of ribbon 2-knots, Osaka J. Math. 34 (1997), 525-540.

[13] Marumoto, Y., Stably equivalence of ribbon presentations, J. Knot Theory Ramifications 1(1992), 241-251.

[14] 河内明夫編、結び目理論（1990）、シュプリンガーフェアラーク東京.

[15] Yasuda, T., An evaluation of the crossing number on ribbon

2-knots, J.Knot Theory Ramifications 15(2009),1-15.

［16］安田智之、最小交差数４の二次元リボン結び目、奈良工業高等専門学校研究紀要 44（2009．３月）、69-72.

［17］安田智之、最小交差数４の二次元リボン結び目Ⅱ、奈良工業高等専門学校研究紀要 45（2010．３月）、59-61.

［18］安田智之、最小交差数４の二次元リボン結び目Ⅲ、奈良工業高等専門学校研究紀要 46（2011．３月）、45-48.

［19］安田智之、最小交差数４の二次元リボン結び目Ⅳ、奈良工業高等専門学校研究紀要 47（2012．３月）、37-40.

［20］Yasuda, T., A presentation and the genus for ribbon n-knots, Kobe J. Math 6(1989), 71-88.