最小交差数４の二次元リボン結び目　Ⅴ

安田　智之

Ribbon 2-knots with ribbon crossing number four. Ⅴ.

Tomoyuki YASUDA

二次元リボン結び目は、m 個の二次元球面からなる自明な二次元絡み目に対して、m − 1 個の二次元円環領域を繋げることによって構成される二次元球面のことで、ここでは四次元ユークリッド空間内でこれを考える。任意の二次元リボン結び目 K^2 はこの円環領域の繋ぎ方により結び目型が決定されるが、この繋ぎ方を示すものとして K^2 のリボン表示がある。K^2 についてのリボン表示は一般に複数存在し、ひとつのリボン表示について、二次元円環領域が自明な二次元絡み目と交差する回数の合計をそのリボン表示のリボン交差数という。また、K^2 のすべてのリボン表示を考えたときのリボン交差数の最小数は K^2 の最小交差数とよばれる。これは二次元リボン結び目の複雑さをはかる重要な概念であり、［１］で初めて導入された。［１］においては最小交差数が３以下の二次元リボン結び目は 17 個しか存在しないことが　示され、それぞれに対して最小交差数を実現するリボン表示が与えられた。続いて［２］、［３］、［４］、［５］においては最小交差数４の二次元リボン結び目が調べられている。［２］、［３］ではまず「２ベースリボン表示が最小交差数４を実現するもの」が調べられ、続いて、それらを除き「３ベースリボン表示が最小交差数４を実現するもの」が調べられている。また、［４］ではそれらを除いた上で、「４ベースリボン表示が最小交差数４を実現するもの」が調べられ、［５］では以上の先行研究で調べられたものを除き、「５ベースリボン表示が最小交差数４を実現するもの」が調べられた。以上により最小交差数４をもつ二次元リボン結び目は高々 112 個しか存在しない事を結論している。しかしその後、［６］において welded arcs を調べる方法で最小交差数４の二次元リボン結び目が調べられ、新たに６個の存在が指摘された。その検証を行った結果、更に新たな存在が２個判明したので、今回これらを合わせて報告する。

１．緒　論

二次元リボン結び目とは四次元ユークリッド空間において m 個の二次元球面を m − 1 個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成される二次元球面である。自明でない二次元球面として二次元リボン結び目が発見されて以来、ひとつの二次元リボン結び目を構成するためにどんな方法があるか、更に本質的に何種類の方法があるのか、という問題に関心がもたれてきた。

この問題の解決に迫る一つの方法として二次元リボン結び目 K^2 の最小交差数を決定するという方法がある。ここで最小交差数とは以下のように決められる二次元リボン結び目の不変量である。

K^2 を構成するための、自明な二次元絡み目と二次元円環領域との対のことを K^2 のリボン表示という。リボン表示 $\mathcal{R}$ において、これを構成する円環領域が自明な二次元絡み目と交差する回数の総数のことを $\mathcal{R}$ のリボン交差数といい、$cr(\mathcal{R})$ で表す。ここで K^2 のすべてのリボン表示を考えたとき、そのリボン交差数の最小数が K^2 の最小交差数である。これは $cr(K^2)$ で表される。

二次元リボン結び目に関する最小交差数の概念は［１］において初めて導入された。その後［７］では最小交差数を評価する方法のひとつが導入され、トーラス結び目のスパン結び目として構成される二次元リボン結び目はすべて最小交差数が決定された。また最小交差数を基準とした二次元リボン結び目の分類問題に関して言えば、［１］において、最小交差数が３以下の二次元リボン結び目がすべて決定され、総数は 17 個であることが示された。また、それらの最小交差数を実現するリボン表示も示されている。［２］、［３］、では最小交差数が４の二次元リボン結び目のうち，２ベースリボン表示と３ベースリボン表示が最小交差数４を実現するもの、即ち「２個の二次元球面を１個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成されるリボン表示が最小交差数４を実現するもの」と、「３個の二次元球面を２個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成されるリボン表示が最小交差数４を実現するもの」がそれぞれ高々 10 個と 47 個であることが示された。［４］では、それらを除き、４ベースリボン表示が最小交差数４を実現するもの、即ち「４個の二次元球面を３個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成されるリボン表示が交差数４を実現する

もの」が高々 35 個であることが示されている。［５］では、以上の 92 個を除き５ベースリボン表示が最小交差数４を実現するもの、即ち「５個の二次元球面を４個の二次元円環領域で繋ぐ事により構成されるリボン表示が交差数４を実現するもの」が高々 21 個あることが示された。そして、以上のことから最小交差数４ の二次元リボン結び目は高々 113 個であることが結論される。ここで［４］の最初の二次元リボン結び目への番号付を 58 とするところを 57 と誤ったことにより［５］の最後の二次元リボン結び目の番号が 112 になっていることに注意する。その後、［６］において welded arcs を調べる方法で最小交差数４の二次元リボン結び目が調べられ、新たに６個の存在することが指摘された。その検証を行った結果、更に２個の存在が判明したので今回これら計８個の二次元リボン結び目の存在について報告する。これらはすべて４ベースリボン表示が最小交差数を実現するものである。従って、最小交差数４をもつ二次元リボン結び目は高々 121 個であることが結論される。

本論文では次のことを示す。

補題　最小交差数４の二次元リボン結び目のうち４ベースリボン表示が最小交差数を実現するものは、［２］、［３］、に掲載されたものを除けば、高々 43 個である。

これにより、次のことが結論される。

定理　最小交差数が４の二次元リボン結び目の総数は高々 121 個である。

２．準　備

２．１ 定義（［１］）

$\{D^3_\mu \mid \mu = 1, 2, \cdots, m\}$ を互いに交わらない四次元ユークリッド空間 R^4 内の三次元球体の族とする。また、$\partial D^3_\mu = O^2_\mu$ とおく。

一方、$f^r_{i_r j_r} : D^2 \times I \to R^4$

$(r = 1, 2, \cdots, m-1\ ;\ i_r,\ j_r = 1, 2, \cdots, m)$

を、像が互いに交わらない埋め込みの族とし、かつ、次の性質（１）、（２）を満たすものとする。但し D^2 は二次元球体、$I = [0,1]$ である。

（１）$f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I) \cap O^2_\mu = \begin{cases} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \{0\}) & (i_r = \mu) \\ f^r_{i_r j_r}(D^2 \times \{1\}) & (j_r = \mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$

（２）$(\cup^{m-1}_{r=1} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I)) \cap (\cup^m_{\mu=1} O^2_\mu)$ は連結。

ここで K^2 を二次元球面

$(\cup^m_{\mu=1} O^2_\mu) \cup (\cup^{m-1}_{r=1} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I)) - \mathring{T}$ とする。但し $T = \cup^{m-1}_{r=1} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I)$ であり $\mathring{T}$ は T の内部を表す。

この時、K^2 のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

２．２　定義（[1]）

$\mathcal{O} = \cup^m_{\mu=1} D^2_\mu$, $\mathcal{B} = \cup^{m-1}_{r=1} f^r_{i_r j_r}(D^2 \times I)$

とおくとき（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）のことを二次元リボン結び目 K^2 に対する m ベースリボン表示（或いは単にリボン表示）と呼ぶ。また $\mathcal{O}$ をベース、$\mathcal{B}$ をバンドと呼ぶ。更に、二次元リボン結び目 K^2 に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことを K^2 のベース指数と呼び $b(K^2)$ で表す。このとき K^2 は $b(K^2)$ ベース二次元リボン結び目であるという。

２．３　定義（[1]）

$\ell_r = f^r_{i_r j_r}(\{0\} \times I)$（$r = 1, 2, \cdots, m-1$）とおく。但し、$\{0\}$ は D^2 の中心点である。ここで各 ℓ_r は $\mathcal{O}$ に有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各 ℓ_r の方向に従って $a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rs_r}$ とし（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）のリボン交差と呼ぶ。但し各 ℓ_r の方向が O^2_i から O^2_j へ向かう方向とする。この時

$n = \sum_{r=1}^{m} s_r$ をリボン表示のリボン交差数と呼び、（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）は n 交差リボン表示であるという。そうして K^2 に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことを K^2 の最小交差数（或いは単に交差数）と呼び $cr(K^2)$ で表す。

２．４　定義

$a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rs_r}$ に対応して、s_r 個の文字からなる語 w_r をつくる。つくり方は ℓ_r が D^3_μ に点 a_{rv}（$v = 1, 2, \cdots, s_r$）で正の側から交わるとき、w_r の v 番目の文字を x_μ、負の側から交わるときは同様 x^{-1}_μ とする。このようにしてつくられた語 $w_1, w_2, \cdots, w_{m-1}$ を利用して K^2 の結び目群 $\pi_1(R^4 - K^2)$ の群表示を次の様に構成できる。

（*1）$[\, x_\mu\ ;\ \mu = 1,2, \cdots, m \mid x_i w_r x^{-1}_j w^{-1}_r\ ;$
$r = 1, 2, \cdots, m-1 \,]$

但し各 x_μ は O^2_μ のメリディアン生成元とする（[8]）。以上の様な構成法でリボン表示（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）から得られた群表示（*1）のことを（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）に関連したリボン群表示と呼ぶ。また各 w_r のことをこのリボン群表示の語と呼ぶ。一方、リボン群表示（*1）からは、逆の手順でリボン表示（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）を定められるので（$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$）のことをリボン群表示（*1）に関連したリボン表示と呼ぶ。

３．補題の証明

最小交差数４のリボン結び目のうち、２ベースリボン表示と３ベースリボン表示が最小交差数４を実現するものを除いた上で、４ベースリボン表示が最小交差数４を実現するものが［4］で 35 個列挙されている。あと、８個を以下にあげる。

次のリボン群表示 G_j に関連したリボン表示を $\mathcal{R}_j$ とする。

$$G_j = [\, x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \mid x_1 w_{j1} x^{-1}_2 w^{-1}_{j1},\ x_1 w_{j2} x^{-1}_3 w^{-1}_{j2},\ x_1 w_{j3} x^{-1}_4 w^{-1}_{j3} \,]$$

ここで w_{j1}，w_{j2}，w_{j3}、は８種の文字 $x_1, x^{-1}_1, x_2, x_2^{-1}, x_3, x_3^{-1}, x_4, x_4^{-1}$，のいずれかでつくられる各々２文字、１文字、１文字、の語である。ここで８個の文字の優先順位はこの順であるとする。w_{j1}, w_{j2}, w_{j3},を繋げた４文字の語を辞書式順序ですべて並べ，[1]，[2]，[3]，[4]において列挙されたリボン表示と同じ二次元リボン結び目を表すリボン表示を省くと、下記の８個が残る。ここにおいて上記の緒論で述べた誤りを正すため、[4] の最初の語 w_{57} を w_{58} に書き改め、[4]、[5]、の語の番号を１ずつ後ろにずらす番号付をしていくと [5] の最後の語が w_{113} になることに注意する。今回新たに付け加わる８個は、つぎの語を関係子とするリボン群表示に関連するリボン表示をもつ二次元リボン結び目である。

$$
\begin{aligned}
w_{114} &= x_4x_3,\ x_1,\ x_2\\
w_{115} &= x_4x_3,\ x_1,\ x_2^{-1}\\
w_{116} &= x_4x_3,\ x_1^{-1},\ x_2\\
w_{117} &= x_4x_3,\ x_1^{-1},\ x_2^{-1}\\
w_{118} &= x_4^{-1}x_3,\ x_1^{-1},\ x_2^{-1}\\
w_{119} &= x_4^{-1}x_3^{-1},\ x_1,\ x_2\\
w_{120} &= x_4^{-1}x_3^{-1},\ x_1,\ x_2^{-1}\\
w_{121} &= x_4^{-1}x_3^{-1},\ x_1^{-1},\ x_2^{-1}
\end{aligned}
$$

ここで、各 G_j に対して [7] における二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式計算法を適用すると容易にリボン表示 $\mathcal{R}_j$ の実現する二次元リボン結び目のアレキサンダー多項式 Δ_j（mod $\pm t^{\alpha}$）が次のように求まる。

$$
\begin{aligned}
\Delta_{114} &= -1+2t-3t^2+2t^3-t^4\\
\Delta_{115} &= -3+4t-2t^2\\
\Delta_{116} &= 1-3t+2t^2-2t^3+t^4\\
\Delta_{117} &= -1+2t-4t^2+2t^3\\
\Delta_{118} &= 2-4t+2t^2-t^3\\
\Delta_{119} &= 1-2t+2t^2-3t^3+t^4\\
\Delta_{120} &= -2+4t-3t^2\\
\Delta_{121} &= -1+2t-3t^2+2t^3-t^4
\end{aligned}
$$

但し $\mathcal{R}_{114}$ と $\mathcal{R}_{121}$，$\mathcal{R}_{115}$ と $\mathcal{R}_{120}$，$\mathcal{R}_{116}$ と $\mathcal{R}_{119}$，$\mathcal{R}_{117}$ と $\mathcal{R}_{118}$ はそれぞれ互いに鏡像の関係にある。

（証了）

謝　　辞

[4] における二次元リボン結び目の数え上げに関しての不足をご指摘いただいた小松聖弥氏、また、その研究についてのご教示をいただいた金信泰造先生に感謝いたします。

参考文献

[1] Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 10 (2001), 999 - 1003.

[2] 安田智之、最小交差数４の二次元リボン結び目、奈良工業高等専門学校研究紀要第 44 号 (2009 年３月)、69 - 72.

[3] 安田智之、最小交差数４の二次元リボン結び目 Ⅱ、奈良工業高等専門学校研究紀要第45号 (2010年3月)、59 - 61.

[4] 安田智之、最小交差数４の二次元リボン結び目 Ⅲ、奈良工業高等専門学校研究紀要第46号 (2011年3月)、45 - 48.

[5] 安田智之、最小交差数４の二次元リボン結び目Ⅳ、奈良工業高等専門学校研究紀要第 47 号 (2012 年 3 月)、37 - 40.

[6] 小松聖弥、4 交点以下の welded arc　の数え上げ、研究集会「結び目の数学Ⅷ」報告集 (2016 年 2 月)、121 － 128.

[7] Yasuda,T., An evaluation of the crossing number on ribbon 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 15 (2006), 1 - 9.

[8] Yajima, T., On characterization of knot groups of some spheres in R^4, *Osaka J. Math*. 6 (1969), 435 - 446.

[9] Yasuda,T., A presentation and genus for ribbon n-knots, *Kobe J. Math*. 6 (1989), 71 - 88.